DVA DNI S DIDAKTIKOU MATEMATIKY 2019

ZBORNÍK PRÍSPEVKOV

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVA
BRATISLAVA, 5. – 6. 9. 2019

ORGANIZÁTOR

ODDELENIE DIDAKTIKY MATEMATIKY

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY

UNIVERZITA KOMENSKÉHO V BRATISLAVE

PROGRAMOVÝ A ORGANIZAČNÝ VÝBOR

MÁRIA SLAVÍČKOVÁ

MONIKA DILLINGEROVÁ

PETER VANKÚŠ

MICHAELA VARGOVÁ

EDITOR

MÁRIA SLAVÍČKOVÁ

Táto publikácia neprešla jazykovou úpravou. Príspevky neboli recenzované. Za obsahovú náplň príspevkov a ich jazykovú stránku zodpovedajú autori.

Vyšlo v roku 2019

ISBN 978 – 80 – 8147 – 092 – 9

OBSAH

MATEMATICKÉ ÚLOHY S REÁLNYM KONTEXTOM TROŠKU INAK

Babinská Martina, Djubašáková Barbora 6

MOTIVUJME SA MOTIVOVAŤ ŽIAKOV (AKO PREŽIŤ SUPLOVANÚ HODINU)

Jaroslav Baričák 13

MATURITA Z MATEMATIKY VO VYBRANÝCH KRAJINÁCH

Čipková Hamplová Lujza, Reiterová Monika 18

GEOMETRIA – KRITICKÉ MIESTO ŠKOLSKEJ MATEMATIKY (?)

Lucia Csachová 21

SPOLOČENSKÉ HRY NA MATEMATIKE

Ivona Demčáková 27

DOMÁCA PRÍPRAVA ŠTUDENTOV NA HODINY MATEMATIKY TROCHU INAK

Barbora Djubašáková 30

O MATEMATICKÝCH ÚLOHÁCH BEZ SLOV

Mária Dományová 33

AKO FUNGUJE DOUČOVANIE CEZ SKYPE

Martin Dovičák, Adam Slovák 36

ZROD A VÝVOJ ŠTATISTIKY

Ľubomír Družbacký 39

ÚLOHA "NEZMYSLOV" VO VZDELÁVANÍ

Jozef Hvorecký 46

NAČO BOL PTOLEMAIOVI ZLATÝ REZ?

Zbyněk Kubáček 53

ZHODNÉ ZOBRAZENIA V RÔZNYCH HUDOBNÝCH DIELACH

Kataína Laššová 57

OBJEVUJEME V MATEMATICE

Jarmila Novotná 58

HRA SO ŠTYRMI POHÁRMI

Jozef Rajník 62

MATURITNÁ SKÚŠKA Z MATEMATIKY – HISTORICKÝ POHĽAD

Monika Reiterová, Lujza Čipková Hamplová 63

POSTOJE ŽIAKOV K MATEMATIKE

Monika Reiterová 66

LEN VÝPOČET NESTAČÍ

Mária Slavíčková 69

MATEMATICKÉ EDITORY PRE ŽIAKOV SO ŠPECIÁLNYMI VÝCHOVNO-VZDELÁVACÍMI POTREBAMI

Mária Stankovičová 76

FINANČNÁ GRAMOTNOSŤ NA SLOVENSKÝCH ŠKOLÁCH

Peter Tóth 79

AKO UČIŤ MATEMATIKU ZAUJÍMAVO

Viera Uherčíková, Peter Vankúš 81

GAMIFIKÁCIA VYUČOVANIA MATEMATIKY NA 2. STUPNI

Lukáš Vícen 85

UČME ZLOMKY CEZ MERANIE: PREČO A AKO

Jana Višňovská, Matej Slabý 88

Milé kolegyne, milí kolegovia,

Štvrtý ročník konferencie Dva dni s didaktikou matematiky bol podľa Vašich reakcií jeden z najlepších, ak nie najlepší, aký sme doteraz mali. Vyzeralo to ako keby sa všetci účastníci dohodli na téme. Pozvané prednášky a prihlásené príspevky sa dopĺňali, pracovné dielne nám umožnili si zažiť aktivity, o ktorých bolo rozprávané. Tento ročník sme prvýkrát zaradili aj možnosť prezentácie pomocou posterov, čo využili najmä študenti. Dúfam, že do ďalšieho ročníka sa ich prihlási ešte viac.

Rada by som verila, že naša snaha o vytvorenie aktívnej komunity učiteľov a učiteliek matematiky, ktorí sa každoročne stretávajú na akademickej pôde a zdieľajú medzi sebou nápady, podnety, osvedčené praktiky, ktoré sa v triedach ukázali ako tie, ktoré našich súčasných žiakov oslovujú, ktoré ich motivujú a vedú k lepším výsledkom, nie je márna. Že sa nebudete báť prezentovať Vašu prácu (aj keď ju považujete možno za nezaujímavú pre ostatných), že sa zapojíte do diskusií, nebudete sa ostýchať opýtať sa a celkovo prispejete k priateľskej atmosfére konferencie.

Som nesmierne rada, že konferencia má svoje „účastnícke stálice“ a tiež, že na každom ročníku vidno aj nové tváre. Je to pre nás, ako organizátorov, naozaj povzbudivé a o to s väčšou radosťou a nasadením sa pustíme do prípravy piateho ročníka našej konferencie.

Dúfam, že krátke články, ktoré sú uverejnené v zborníku príspevkov Vám pomôžu si niektoré príspevky pripomenúť, alebo sa dozviete niečo o príspevkoch, na ktorých ste sa nemohli zúčastniť. Nebojte sa osloviť autorov, ak Vás ich príspevok zaujal, alebo by ste chceli vyskúšať niečo z toho, čo robili.

Neostáva, len pevne dúfať, že začiatok septembra a nového školského roka sa bude spájať aj s našou konferenciou, na ktorú prídete načerpať podnety do ďalšej tvorivej práce, prídete sa podeliť o vlastné skúsenosti a najmä, upevníte staré priateľstvá ale aj vytvoríte nové.

Za programový a organizačný výbor,

Mária Slavíčková

MATEMATICKÉ ÚLOHY S REÁLNYM KONTEXTOM TROŠKU INAK

BABINSKÁ MARTINA, DJUBAŠÁKOVÁ BARBORA

ABSTRAKT. *Úlohy s reálnym kontextom? Mnohí z Vás už o nich určite veľa počuli. Čo to teda vlastne je? A ako motivovať študentov druhého stupňa základnej školy s nadšením pracovať na týchto úlohách? Príďte si to vyskúšať na vlastnej koži! Využijeme nielen úlohy s reálnym kontextom, ale aj skupinovú prácu, kreativitu, matematické a kritické myslenie.*

Realistic Mathematics Education (RME)

Úlohy s reálnym kontextom, slovné úlohy či kontextové úlohy. Týmito a mnohými ďalšími pojmami označujeme úlohy, ktoré zasadzujú matematický problém do kontextu reálneho sveta – sveta okolo nás. Pri práci s takýmto problémom musí študent najskôr porozumieť slovnému textu, identifikovať matematický problém a až následne zvoliť matematické nástroje na jeho riešenie. Matematicky, tak získava možnosť nie len precvičovať a utvrdzovať si už nadobudnuté vedomosti, ale aj objavovať a bádať – vytvárať si novú poznatkovú štruktúru na základe vlastnej skúsenosti.

Myšlienka stavania vyučovania na reálnej potrebe nie je nová. Po prvýkrát sa s ňou stretávame už pred viac ako 400 rokmi v diele Jána Amosa Komenského [1]. Výraznejšie sa však do popredia dostáva až v 20-tom storočí. Na našom území patrí medzi prvých zástancov psychológ Ján Hvozdík [2], v matematike profesor Hans Freudenthal, autor *Realistic Mathematic sEducation* (RME)[3].

Slovo „reálny“ resp. „realistický“ v teórii RME je chápané širšie, ako nám môže evokovať jeho slovenský preklad. Za úspešnú kontextovú úlohu je považovaná taká úloha, ktorá je pre študentov:

- prístupná a lákavá,
- zmysluplná a hodná riešenia (reflektujúca dôležité ciele),
- zaujímavá (študent je vtiahnutý do riešeného problému a stáva sa jeho majiteľom),
- primerane obťažná (úloha by mala obsahovať problémy vyžadujúce pri riešení širokú škálu zručností, od tých základných až po vyšší level zdôvodňovania),
- primerane neznáma (vytvárajúca priestor pre matematizáciu),
- dôležitá (študentovi musí byť zrejmé, prečo je zodpovedanie položenej otázky a vyriešenie úlohy dôležité),
- variabilná (umožňujúca rôzne prístupy k riešeniu),
- dosiahnuteľná (zadanie musí byť študentovi jasné),
- osobná s otvoreným koncom (študent musí mať možnosť formulovať odpoveď vlastnými slovami),
- pozitívne testujúca (umožňujúca študentovi ukázať skôr to, čo vie a nie to, čo nevie),
- férová (ukazujúca reálny obraz študentových vedomostí) [4].

Kontext tejto úlohy následne môže, ale nemusí vychádzať z aktuálneho, reálneho sveta okolo nás [4]. Podľa potrieb študentov sa rovnako môže opierať napríklad o historické pramene, či vymyslený svet.

Okrem kontextu a formy zohráva pri kontextových úlohách kľúčovú formu ich zaradenie do vyučovacieho procesu. Aj „najlepšia“ úloha, môže byť do vyučovania zaradená

nevhodne. Podobne ako pri výbere kontextu, aj pri samotnej implementácii kontextových úloh musíme vždy pamätať a rešpektovať individuálne potreby žiakov s ktorými pracujeme [5].

Priami nasledovníci profesora Freudenthala, pôsobiaci na Univerzite v Utrechte, na Freudenthalovom inštitúte (Freudenthal Institute for Science and Mathematics Education), pokračujú v šírení myšlienky RME. Práve vďaka jednej z týchto iniciatív sa nám podarilo zúčastniť letnej školy, z ktorej sme Vám priniesli aktivitu zaradenú do Dvoch dní s Didaktikou matematiky, a ktorej sa venujeme v nasledujúcej časti tohto príspevku.

Workshop

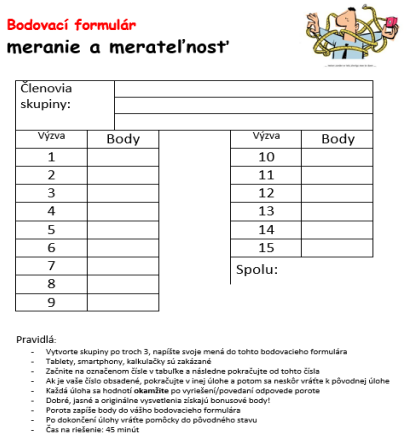
Úlohy s reálnym kontextom môžu byť rôzneho charakteru, môžu mať rôznu formu zadania, predpokladajú viaceré správne spôsoby riešenia, výsledok nie je vždy jednoznačný a správny. Žiaci môžu úlohy riešiť skupinovo, ale aj individuálne. My sme sa v rámci workshopu rozhodli ukázať práve úlohy, ktoré nemajú jednoznačný spôsob riešenia a nie vždy pri nich záleží na správnom výsledku. Našim hlavným cieľom bolo, aby si učitelia sami vyskúšali riešenie úloh bez toho, aby sme im vopred niečo o tých úlohách povedali.

Príprava a priebeh aktivity

V úvode stretnutia sme účastníkom workshopu oznámili tému nadchádzajúcej aktivity: “Meranie a merateľnosť”. Keďže pre túto aktivitu je vhodnejšia skupinová práca, rozdelili sme všetkých účastníkov do trojčlenných tímov. Rozdelenie bolo uskutočnené náhodne. Každý si vylosoval jeden lístoček s číslom skupiny, do ktorej patrí. Takéto náhodné vytvorenie skupín je podľa nás najoptimálnejšie, pretože predpokladá stretnutie “rôzne uvažujúcich” ľudí (žiakov) v jednej skupine. Každá skupina následne dostala jeden bodovací formulár (obrázok 1), ktorý mal zakrúžkované číslo výzvy. Toto číslo predstavovalo číslo úlohy, ktorú má skupina začať riešiť ako prvú. Týmto zabezpečíme, že sa jednotlivé skupiny riešiteľov nestretnú na rovnakej výzve. Odporúčame krúžkovať každé druhé alebo až každé tretie číslo výzvy v bodovacom formulári v závislosti od počtu tímov. Súčasťou bodovacieho formulára sú aj pravidlá aktivity, ktoré sme účastníkom prečítali a v prípade potreby vysvetlili.

Pravidlá aktivity uvedené na bodovacom formulári (v zátvorkách sú naše komentáre a doplnené slovné vysvetlenie):

- Vytvorte skupiny po troch 3 (vytvorili sme náhodným žrebovaním), napíšte svoje mená do tohto bodovacieho formulára.
- Tablety, smartphony, kalkulačky sú zakázané (žiaci by nemali používať ani učebnice, knihy, atlasy a pod., mali by pracovať iba s poskytnutými pomôckami).
- Začnite na vyznačenej (zakrúžkovanej) výzve v tabuľke a následne pokračujte postupne od tohto čísla.
- Ak je vaše číslo obsadené, pokračujte v inej úlohe a potom sa neskôr vráťte k pôvodnej úlohe.
- Každá úloha sa hodnotí okamžite po vyriešení/povedaní odpovede porote (svoje riešenie najskôr ukážte a zdôvodnite porote a až následne môžete ísť na ďalšiu úlohu/výzvu).
- Dobré, jasné a originálne vysvetlenia získajú bonusové body!
- Porota zapíše body do vášho bodovacieho formulára.
- Po dokončení úlohy vráťte pomôcky do pôvodného stavu.
- Čas na riešenie: 45 minút.



Bodovací formulár

meranie a merateľnosť

Členovia skupiny:	

Výzva	Body	Výzva	Body
1		10	
2		11	
3		12	
4		13	
5		14	
6		15	
7		Spolu:	
8			
9			

Pravidlá:

- Vytvorte skupiny po troch 3, napíšte svoje mená do tohto bodovacieho formulára
- Tablety, smartphony, kalkulačky sú zakázané
- Začnite na označenom čísle v tabuľke a následne pokračujte od tohto čísla
- Ak je vaše číslo obsadené, pokračujte v inej úlohe a potom sa neskôr vráťte k pôvodnej úlohe
- Každá úloha sa hodnotí **okamžite** po vyriešení/povedaní odpovede porote
- Dobré, jasné a originálne vysvetlenia získajú bonusové body!
- Porota zapíše body do vášho bodovacieho formulára
- Po dokončení úlohy vráťte pomôcky do pôvodného stavu
- Čas na riešenie: 45 minút

Obrázok 1

Čas na riešenie jednotlivých úloh sme stanovili na 45 minút. Ak však máte v škole so žiakmi dve vyučovacie hodiny po sebe, tak im môžete nechať na riešenie viac času. Žiaci tým získajú možnosť zvládnuť viacero výziev. Nie je však nutné, aby každá skupiny riešila všetky úlohy.

Porotou sa v tomto prípade myslí učiteľ hodnotí riešenia a odpovede na jednotlivé úlohy. K dispozícií je 10 bodová škála. 0 predstavuje hodnotenie v prípade nesprávneho/najhoršieho riešenia. 10 predstavuje je správne/najlepšie riešenie. Okrem týchto bodov môže učiteľ udeliť, podľa vlastného uváženia, aj bonusové body za originálnu a kreatívnu odpoveď. Súčasťou materiálov k tejto aktivite je aj krátka príručka pre učiteľa, v ktorej sú uvedené odpovede aj s možnými odôvodneniami a stručný návod, akým spôsobom je možné hodnotiť riešenia.

Použité výzvy

Všetky výzvy z tejto aktivity, ako sme už uviedli, vychádzajú z matematickej témy “Meranie a merateľnosť”. Ich hlavným zámerom je budovanie intuitívneho odhadu u žiakov.

Ako príklad uvedieme podrobnejšie jednu z výziev. V rámci tejto výzvy bolo úlohou skupiny nabrať do plastového vrecka 400 g cukru. K dispozícií majú veľkú nádobu s cukrom, na ktorej nie je napísaný jej objem a jednu polievkovú lyžicu. Porota (učiteľ) má pri sebe váhu, na ktorej kontroluje správnosť riešenia. Na obrázku 2 môžeme vidieť veľmi presný odhad jedného tímu z workshopu. Napriek tomu, že táto úloha vyzerá na prvý pohľad veľmi jednoducho, pre žiakov základnej školy je pomerne náročná. Mnohí z týchto žiakov nemajú veľa skúseností s odhadom.

Podobne ako táto úloha, aj ostatné úlohy sú zamerané na budovanie odhadu a premenu jednotiek (propedeutika).

Obrázok 2

Zadania úloh

V prípade realizácie, odporúčame zadania úloh rozmiestniť po triede, najvhodnejšie pripevniť na stenu s dostatočnými rozostupmi medzi jednotlivými úlohami.

1 Niečo sladké pod zub

Pomôcky: nádoba s cukrom, plastové vrecko (sáčok), lyžica.

Úloha: Nasypte 400 g cukru do plastového vrecka.

2 Tínedžeri a budúcnosť

Pomôcky: papier a pero

Holandské noviny (6-1-2018): Tínedžeri - Tento rok X mladých tínedžerov dovŕši osemnásť rokov. Napriek tomu, že im vysoké očakávania prinášajú stres, hodnotia svoj život číslom 8,4.

Úloha: Čo je X? Alebo inými slovami: koľko mladých dovŕši tento rok osemnásť rokov v Holandsku?

3 Ľahké, ľahšie, najľahšie

Pomôcky: fľaša z vína, misa (tanier)

Úloha: Keby ste mali fľašu z vína úplne naplnenú vodou, vošlo by toto množstvo vody do misky (taniera)?

A. Áno, vojde to tam jednoducho (ľahko).
B. Áno, vojde to tam presne akurát.
C. Takmer, ale nie úplne.
D. Určite nie.

4 Dlhý, dlhší, najdlhší

Pomôcky: papier a pero

Úloha: Koľko kilometrov vlasov má táto mladá dáma na hlave? Táto dĺžka približne zodpovedá dĺžke:

A. priemernej etape Tour de France.
B. dĺžke maratónu.
C. dĺžke behu od Tatier k Dunaju.

5 Vzdialenosť

Pomôcky: všetky druhy predmetov a/alebo odevov

Úloha: Pomocou predmetov v miestnosti (neberte ich z iných úloh) a/alebo vlastných vecí (oblečenia) vytvorte vzdialenosť 5 metrov.

6 Rast

Pomôcky: papier a pero

Úloha: Čo rastie rýchlejšie: vaše nechty alebo vlasy?

7 Závodné šelmy

Pomôcky: papier a pero

Úloha: Nasledujúce zvieratá sa zúčastňujú pretekov: gepard, chrt, kôň, myš, včela. Predpovedajte konečný výsledok pretekov. Zoraďte a zapíšte poradie zvierat od najpomalšieho po najrýchlejšie. Ako dlho dokážu držať svoju najvyššiu rýchlosť nie je dôležité. Nezabudnite vysvetliť svoju predpoveď výsledkov pretekov.

8 Kávový kúpeľ

Pomôcky: papier a pero

Úloha: Môže množstvo kávy a čaju, ktoré pijete ročne, naplniť priemernú vaňu? Majte jasné, správne a originálne vysvetlenie.

9 Slonia múmia

Pomôcky: papier a pero

Úloha: Koľko roliek toaletného papieru by ste potrebovali na vytvorenie múmie zo slona (priemerný dospelý slon)?

10 Fitness? Krokety?

Pomôcky: papier a pero

Úloha: Tamara váži 70 kg a rada by si túto hmotnosť udržala. Dnes má na obed krokety, ktoré obsahujú približne 150 kcal. Ak chce Tamara spáliť 150 kcal, môže si vybrať medzi: chôdzou po schodoch (smerom hore) a plávaním.

Ktorú činnosť si má Tamara vybrať, ak chce spáliť týchto 150 kcal čo najrýchlejšie? Koľko minút času by získala v porovnaní s druhou aktivitou?

11 Priveľa hluku

Predpisy o ochrane zdravia a bezpečnosti uvádzajú, že hladina zvuku pri popových vystúpeniach nesmie byť vyššia ako 103 decibelov. To zodpovedá približne zvuku…….. Doplňte odpoveď. Premýšľajte o zvuku, ktorý má silu približne 103 decibelov.

12 Šplech!

Pomôcky: papier a pero

Úloha: Ako dlho by to trvalo, kým by Niagarské vodopády naplnili olympijský bazén?

13 Spisovatelia

Úloha: Koľko kilometrov textu môžeme napísať pomocou guľôčkového pera Bic? Počet kilometrov je rovnaký ako:

A. 1 míľa;
B. 6 kôl na korčuliarskej dráhe na veľkú vzdialenosť;
C. výška vrcholu Mont Blanc;
D. vzdialenosť medzi Malinovom a Sencom.

14 Tesne zabalené

Pomôcky: papier a pero

Úloha: Ak umiestnime všetkých ľudí na svete tesne vedľa seba (rameno k ramenu), aký veľký priestor zaberú? Táto oblasť by bola približne rovnako veľká ako:

A. Prešovský kraj
B. Slovensko
C. Francúzsko
D. Európa

15 Loptičky

Pomôcky: papier a pero

Úloha: Koľko stolnotenisových loptičiek by sa zmestilo do kufra stredne veľkého automobilu?

Vyhodnotenie aktivity

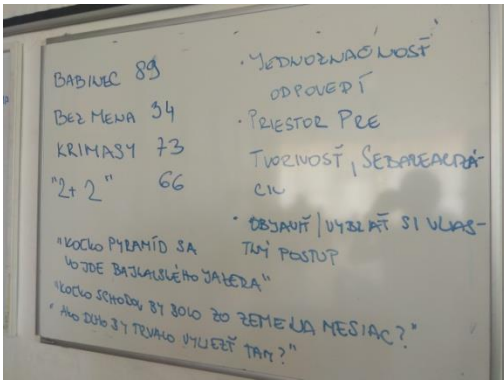
Po uplynutí stanoveného času si každá skupina spočíta svoje nazbierané body. Jednotlivé skupiny nemusia mať vyriešené všetky úlohy. Ak prezentujeme aktivitu ako súťaž, tak tím s najvyšším počtom bodov je víťazný a môžeme ho odmeniť.

Podľa nášho názoru by nemala byť hodina ukončená len porovnaním bodového skóre. Po ukončení študentskej práce by mala nasledovať diskusia o úlohách. Niektorých žiakov budú zaujímať odpovede a aj možné vysvetlenia riešení. Učiteľ by preto mal vytvoriť priestor, kde sa budú môcť žiaci vyjadriť k jednotlivým úlohám a vysvetliť si medzi sebou svoje spôsoby riešenia. Učiteľ by mal v tejto časti práce vstupovať iba ako koordinátorom diskusie.

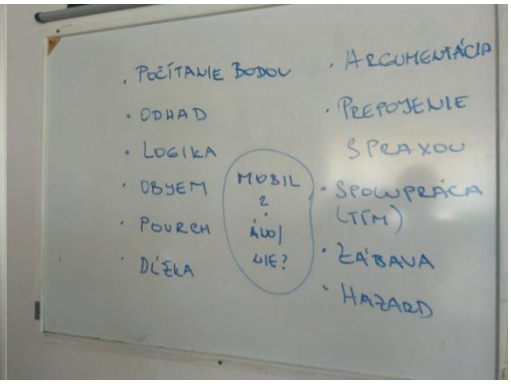
Záver workshop-u

V rámci workshopu sme na záver uskutočnili krátku diskusiu. Účastníkov sme sa pýtali:
- čo si myslia o danej aktivite,
- či by túto aktivitu zaradili do vyučovacích hodín predmetu matematika alebo len ako mimo vyučovaciu aktivitu,
- čo podľa nich táto aktivita rozvíja u žiakov,
- či žiak pri ich riešení používa nejaké zručnosti a schopnosti, ak áno, aké.

Z diskusie nám vyplynulo (viď obrázok 3 a 4), že daná aktivita vytvára žiakom priestor pre tvorivosť a sebarealizáciu. Rozvíja kompetencie ako argumentácia, kde žiak musí najskôr argumentovať v rámci skupiny a potom celá skupina pri komunikácií s učiteľom (porotou). Ďalej sa žiak učí spolupracovať v tíme. Objavuje a vyberá postup riešenia, ktorý je častokrát založený na osobných skúsenostiach.



Obrázok 3



Obrázok 4

V závere diskusie sme sa dostali aj k bodu mobily a technológie. Účastníci workshopu diskutovali, či je pri tejto aktivite vhodné alebo nevhodné používať mobily a iné technológie. My sme si vybrali možnosť nepoužívať, pretože našim cieľom bolo rozvíjať odhad u žiakov, budovať schopnosť argumentácie a kompromisu. Nechceme, aby si žiaci tieto informácie našli na internete, potom sa vytráca komunikácia medzi nimi o riešeniach úloh. Myslíme si však, že aktivitu by bolo možné vykonať aj s použitím technológií. Jej cieľ by sa však zmenil a od žiakov by sa vyžadovali precíznejšie odpovede.

Záver

Úlohy uvedené v tomto príspevku boli inšpirované naším pobytom na letnej škole v Utrechte na Freudenthalovom Inštitúte v Holandsku. Týmto by sme sa organizátorom letnej školy chceli aspoň takto na diaľku poďakovať. Veríme, že uvedené úlohy budú aj pre Vás inšpirujúce a pomôžu Vám vytvoriť pre Vašich žiakoch podnetné prostredie.

Literatúra

[1] Komenský, J. A.: *Veľká didaktika*. Bratislava, 1991

[2] Hvozdík , J:. *Základy školskej psychológie*. Bratislava, SPN, 1986

[3] Van DenHeuvel-Panhuizen, M.: *RealisticMathematicsEducation as work in progress*. CommonSense in MathematicsEducation, 1-43, 1998. Dostupné na Internete: http://www.fisme.science.uu.nl/en/rme/.

[4] Van DenHeuvel-Panhuizen, M.: *The role of contexts in assessmentproblems in mathematics.*An International Journal of mathematicsEducation*, 25*(2), 2-10, 2005

[5] Middleton, J. A., &Jansen, A.: *Motivationmatters and interestcounts: Fosteringengagement in mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 2011

Mgr. Martina Babinská, PhD.; PaedDr. Barbora Djubašáková
FMFI Univerzity Komenského v Bratislave
Mlynská Dolina,
SK – 842 48 Bratislava
e-mail: martina.babinska.sk@gmail.com , barbora.djubasakova@gmail.com

MOTIVUJME SA MOTIVOVAŤ ŽIAKOV (AKO PREŽIŤ SUPLOVANÚ HODINU)

JAROSLAV BARIČÁK

ABSTRAKT. *Existuje množstvo aktivít, ktoré môžeme využiť v prípade, že chceme zmysluplne využiť suplovanú hodinu alebo ozvláštniť vyučovanie matematiky zaradením netradičnej hodiny. Na workshope sme si vyskúšali niektoré z nich, konkrétne kreslenie sprirolaterálov, hokej na štvorcovej sieti, Einsteinove hádanky a skladanie Happy Cube.*

Úvod

Každému učiteľovi sa občas stane, že musí zastupovať na hodine za svojho kolegu. Na niektorých školách panuje kultúra dôsledného zanechávania materiálov a inštrukcií suplujúcemu učiteľovi. Ten je potom schopný viesť hodinu na pomerne dobrej úrovni. Niekedy sa však stane, že chýbajúci učiteľ z rôznych dôvodov nestihne takéto materiály pripraviť. Suplujúci učiteľ sa týmto dostáva do nemilej situácie, najmä, ak hodina, na ktorú má ísť učiť, nie je jeho aprobačným predmetom. Musí sa popasovať s otázkou, čo bude so žiakmi na hodine robiť.

Jednou z možností je výber aktivity ponechať na žiakoch. Učitelia odporúčajú žiakom učiť sa niečo na ďalšie hodiny, robiť niečo, čo im pripadá zmysluplné. Žiaci takúto možnosť niekedy ocenia, napríklad ak na ďalšej hodine nasleduje test. Častokrát však žiaci nepovažujú za potrebné pripravovať sa na ďalšie hodiny alebo nevedia v danej chvíli vyhodnotiť, aká aktivita by mohla pre nich byť zmysluplná. Toto sa končí hraním sa na mobilnom telefóne alebo nudením sa. Ak používanie mobilov navyše zakazuje školský poriadok, nude sa prakticky nevyhneme a takúto hodinu je možné považovať za premrhaný čas. Rovnaký problém nastáva aj v prípade, že žiaci síce mali zadanú prácu od chýbajúceho učiteľa, ale zvládnu ju spraviť za veľmi krátky čas.

Druhou z možností je poňať takúto hodinu ako priestor na rozvíjanie žiakov, ich logického myslenia, strategického myslenia, priestorovej predstavivosti, jemnej motoriky, sociálnych interakcií, prípadne iných dôležitých schopností a zručností, ktoré sú v súlade s cieľmi vyučovania ako takého. Skúsenosť ukazuje, že žiaci sa na suplovaných hodinách neradi nudia a ocenia, keď im učiteľ sám ponúkne netradičnú, zaujímavú aktivitu, ktorej sa počas hodiny môžu venovať. Niektoré aktivity majú potenciál zaujať niektorých žiakov natoľko, že sa im následne venujú aj vo svojom voľnom čase, napríklad počas prestávok. Medzi takéto aktivity patria rôzne mechanické hlavolamy, logické hlavolamy, niektoré spoločenské hry a mnoho ďalších.

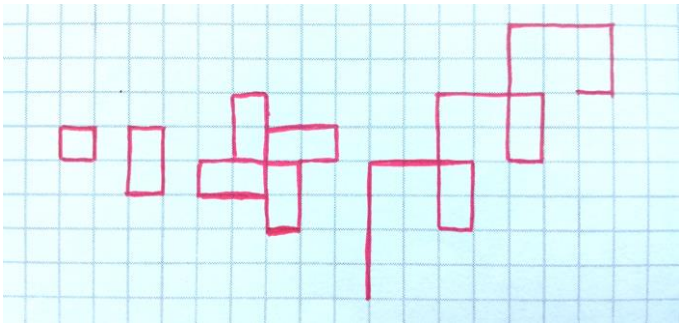
V článku sa venujeme popisu štyroch konkrétnych aktivít, ktoré sa nám na suplovaných hodinách osvedčili. Tieto aktivity je možné zaradiť aj na ozvláštnenie vyučovacích hodín matematiky.

Kreslenie spirolaterálov

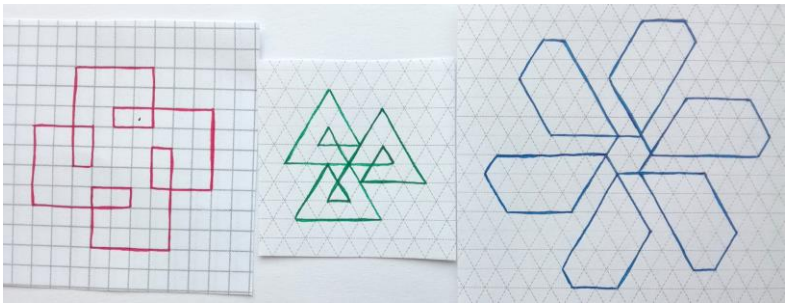
Spirolaterál je geometrický útvar, ktorý vzniká opakovaním jednoduchého pravidla. Na jeho nakreslenie potrebujeme rastúcu postupnosť prirodzených čísel a uhol otočenia. Vzor vzniká postupným kreslením úsečiek, ktorých dĺžky sú vyjadrené číslami postupnosti. Po každej úsečke sa otočíme o daný uhol. V kreslení úsečiek pokračujeme a postupnosť

opakujeme, až kým sa nedostaneme do východiskového bodu, čím sa lomená čiara uzavrie, alebo až dovtedy, kým nezačne byť zrejmé, že čiara sa neuzavrie nikdy [1].

Aktivita je vhodná pre žiakov 2. stupňa základnej školy. Na jej realizáciu je potrebný štvorčekový papier pre každého žiaka, keďže na štvorcovej sieti sa ľahko dodržiava uhol otočenia 90°. Ak žiaci zvládnu kreslenie na štvorcovej sieti, môžeme im ponúknuť aj trojuholníkovú sieť, kde je možné kresliť spirolaterály s uhlom otočenia 60°alebo 120°. Na internete existujú editory, odkiaľ je možné zvolený trojuholníkový papier vytlačiť [2].Žiaci môžu takto experimentovať s tým, ako sa mení sprirolaterál pri danom uhle otočenia, ak zmeníme postupnosť čísel (obr. 1) alebo ako sa zmení spirolaterál pri danej postupnosti, ak zmeníme uhol otočenia (obr. 2).



Obrázok 1: Spirolaterály s uhlom otočenia 90°, ktoré vznikli z rôznych postupností dĺžok úsečiek (zľava postupne 1; 1,2; 1,2,3; 1,2,3,4)



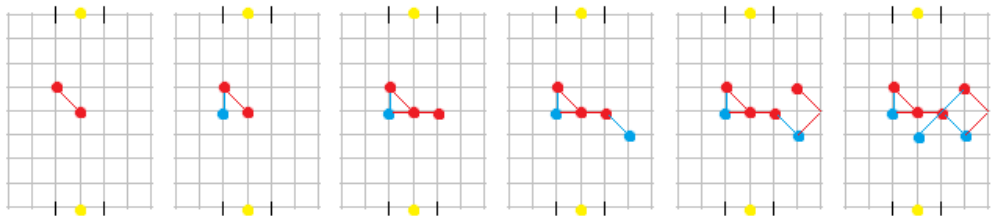
Obrázok 2: Spirolaterályvzniknuté z postupnosti 1,2,3,4,5 s rôznym uhlom otočenia (zľava postupne 90°, 60°, 120°)

Aktivita je jednoduchá na vysvetlenie, princíp stačí vysvetliť na prvých 3 - 4 spirolateráloch na tabuľu (obr. 1). Istou nevýhodou aktivity je, že si počas hodiny vyžaduje kontrolu a pomoc zo strany učiteľa. Je vhodná na tréning sústredenia a pozornosti, precíznosti, jemnej motoriky. V nižších ročníkoch slúži ako propedeutika uhlov. Môžeme požadovať, aby žiaci kreslili čiary s pomocou pravítka a tým si trénujú rysovanie úsečiek.

Hokej na štvorcovej sieti

Ide o zjednodušenú verziu hry [3], ktorá bola v upravenom prevedení použitá ako súťažná aktivita na Jesennom matematickom učiteľskom sústredení 2018, odkiaľ sme sa ju naučili. Uvádzame pravidlá upravenej hry, na ilustráciu slúži obrázok (obr.3):

1. Hrá sa na štvorcovej sieti s rozmermi 6 x 8. Cieľom je dať súperovi gól do jeho brány (tomu zodpovedá jediný mrežový bod).
2. Hra sa začína s pukom v mrežovom bode uprostred hracieho poľa.
3. Hráč vo svojom ťahu môže presunúť puk do ľubovoľného susediaceho mrežového bodu vo všetkých ôsmich smeroch. Ťah znázorní čiarou a označí, kde puk skončil.
4. Pohyb po čiare, ktorou už bol vedený puk, je zakázaný.
5. Ak na mrežovom bode, kam by sme mali umiestniť puk, už puk niekedy bol, nezastaví sa ťah na ňom, ale pokračuje v priamom smere až na najbližší voľný mrežový bod.
6. Od mantinelu a bránovej žrde sa puk odráža. Po zrážke pod uhlom 45° sa puk odrazí opäť pod uhlom 45°, kolmé zrážky nie sú povolené (nastal by rozpor so 4. pravidlom).
7. Ak nie je možné v danom smere celý ťah uskutočniť (lebo aj po uplatnení pravidiel 5 a 6 by nastal rozpor so 4. pravidlom), hráč si musí vybrať iný z ôsmich smerov.
8. Je na hráčoch, aby sa na začiatku hry dohodli, čo sa stane v prípade, ak hráč, ktorý je na ťahu, sa nedokáže pohnúť v žiadnom z ôsmich smerov. Odporúčame takýto výsledok vyhlásiť za remízu.



Obrázok 3: Možný priebeh prvých šiestich ťahov hry. Začínal červený, ktorý útočí na súperovu bránu hore. Žlté body predstavujú miesto, kde treba streliť gól.

Aktivita je vhodná pre žiakov 2. stupňa základnej školy, ale aj pre stredoškolákov. Na jej realizáciu je potrebný štvorčekový papier pre každú dvojicu žiakov. Pomáha rozvíjať kombinatorické a strategické myslenie, a schopnosť dôstojne prehrávať. Keďže ide o spoločenskú hru vo dvojici, vyžaduje sociálnu interakciu. Hra je jednoduchá na vysvetlenie, stačí si zahrať s ľubovoľným žiakom jednu partiu na tabuľu a postupne zavádzať jednotlivé pravidlá. Výhodou je, že potom už nevyžaduje takmer žiadnu kontrolu zo strany učiteľa, žiaci sa hrajú vo dvojiciach. Zo skúseností vieme, že niektorí sa k tejto hre radi vracajú aj počas prestávok.

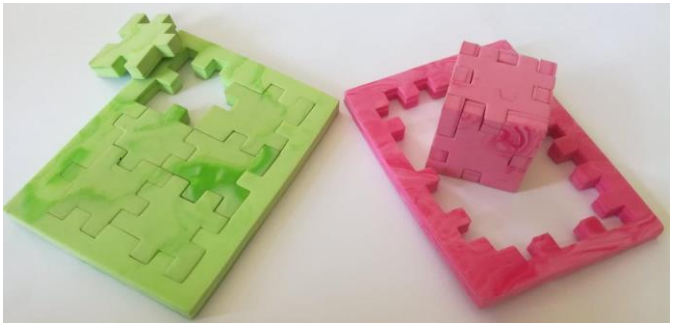
Einsteinove hádanky

Einsteinova hádanka je hlavolam, pri ktorom treba vyplniť postupne údajmi tabuľku, ktorá je na začiatku až na záhlavie prázdna. Pritom sa treba držať podmienok, ktoré sú pri tabuľke zadané. Pôvodnú hádanku vytvoril Albert Einstein s tým, že ju údajne dokáže vyriešiť iba malá časť obyvateľstva. Zbierku podobných úloh s rôznymi námetmi vytvoril Stanislav Hoferek a je voľne dostupná na internete [4].

Aktivita je vhodná pre žiakov 2. stupňa základnej školy aj pre stredoškolákov. V nižších ročníkoch odporúčame prácu vo dvojiciach alebo malých skupinách, ktorú si ale žiaci zvyčajne zvolia aj sami. Na jej realizáciu je potrebné vytlačiť žiakom zadania, učiteľ by si mal vytlačiť správne riešenia kvôli kontrole. Hádanky rozvíjajú kombinatorické a logické myslenie, ale tiež schopnosť argumentovať a zdôvodňovať, ktorá sa naplno prejaví najmä v prípade skupinovej práce. Pri vysvetľovaní pravidiel treba žiakov upozorniť na to, že indície na vyplnenie tabuľky nemusia používať v poradí, v ktorom sú uvedené. Ďalej treba zdôrazniť, že v tabuľke záleží na poradí stĺpcov, teda ak „Anička stojí vedľa Milana“, nie je jedno, či naľavo alebo napravo. Výhodou je, že aktivita nevyžaduje takmer žiadnu kontrolu zo strany učiteľa, žiaci si môžu správne riešenie požičať od učiteľa a skontrolovať sa sami. Niektorých našich žiakov zaujali Einsteinove hádanky natoľko, že sme im na požiadanie tlačili celú zbierku.

Skladanie Happy Cube

Happy Cube je 3D hlavolam. V každom obale sa nachádza 6 vyrezávaných dielikov, z ktorých sa dá postaviť kocka (obr.4). Existujú 4 sady Happy Cube po 6 kociek, jednotlivé sady sú odstupňované podľa náročnosti. V každej sade je každá kocka iná a líši sa farbou. Okrem toho, že cieľom je z dielikov postaviť kocku, ďalším typom výzvy, ktorý hlavolam ponúka, je vrátiť dieliky naspäť do obalu.



Obrázok 4: Happy Cube

Aktivita je vhodná pre žiakov 2. stupňa základnej školy aj pre stredoškolákov. Odporúčame využiť kocky vyššej náročnosti. Nevýhodou práce s kockami je, že si ich treba najskôr zakúpiť. Výhodou je, že ich je potom možné využiť v rôznych situáciách počas vyučovacej hodiny, kedy niektorí žiaci skončia zadanú prácu skôr, napríklad keď odovzdajú v predstihu test a nemajú čo robiť. Naša skúsenosť je taká, že niektorí žiaci si kocku, ktorú nestihli poskladať, chceli požičať aj domov. Naspäť priniesli poskladanú kocku aj s „návodom“ na jej poskladanie vo forme siete zakreslenej na štvorčekovom papieri, čo je netriviálna úloha, ktorú sme navyše ani nevyžadovali splniť. Kocky Happy Cube sú u žiakov obľúbené a považujeme ich za vhodný nástroj na rozvoj priestorovej predstavivosti a trpezlivosti.

Záver

Veríme, že predkladané aktivity budú pre učiteľov inšpiráciou a niektoré z nich zaradia do svojho repertoáru motivačných aktivít využiteľných na vyučovaní.

Literatúra

[1] The Mathenæum: Mathematicalexplorations, games and learning: *Spirolaterals.* [online]. [cit. 2019-10-10]. Dostupné na: <http://thewessens.net/ClassroomApps/Main/spirolaterals.html?topic=geometry&id=10>

[2] Incompetech: *Writing and bulletjournaling.*[online]. [cit. 2019-10-10]. Dostupné na: <https://incompetech.com/graphpaper/>

[3] Wikipedia: *Papersoccer*. [online]. [cit. 2019-10-10]. Dostupné na: <https://en.wikipedia.org/wiki/Paper_soccer>

[4] Stanislav Hoferek: *Einsteinove hádanky*.[online]. [cit. 2019-10-10]. Dostupné na: <http://greenie.elist.sk/knihy/html/einsteinove-hadanky.html>

Mgr. Jaroslav Baričák
FMFI UK
Mlynská dolina
SK – 84248 Bratislava
e-mail: jaroslav.baricak@gmail.com

MATURITA Z MATEMATIKY VO VYBRANÝCH KRAJINÁCH

ČIPKOVÁ HAMPLOVÁ LUJZA, REITEROVÁ MONIKA

ABSTRAKT. *Povinná maturita z matematiky je diskutovanou témou v odbornej aj laickej verejnosti. V príspevku stručne opisujeme maturitnú skúšku z matematiky v súčasnosti v krajinách V4 a vybraných krajinách, ktoré v medzinárodnej štúdii PISA dosahujú výborné výsledky.*

Povinná maturita z matematiky vo vybraných krajinách v súčasnosti

V príspevku sme sa zamerali na maturitnú skúšku z matematiky v Českej republike, Poľsku, Maďarsku, Rakúsku, Fínsku a Singapúre.

Česká republika

Maturitná skúška v ČR sa v roku 2019 skladala z 2 častí: spoločnej (štátnej) a profilovej (školskej). Aby žiak uspel na maturite, musel úspešne zložiť **povinné skúšky oboch častí**. Spoločná časť je tvorená 2 povinnými skúškami (1. český jazyk a literatúra, 2. cudzí jazyk alebo matematika) a najviac 2 nepovinnými skúškami (cudzí jazyk, matematika). Ponuku a počet predmetov profilovej časti určuje riaditeľ školy podľa platného Rámcového vzdelávacieho programu pre daný odbor. Maturita z povinne voliteľnej matematiky [3] sa koná formou 120 minútového didaktického testu s otvorenými i uzavretými úlohami. V ČR existuje aj nepovinná, voliteľná skúška Matematika+, ktorá je výberová pre žiakov záverečných maturitných ročníkov. Koná sa formou didaktického testu po dobu 150 minút. Výsledok skúšky Matematika+ sa neuvádza na maturitnom vysvedčení, ale žiaci dostanú výpis výsledkov testu. Úspešné absolvovanie tejto skúšky zohľadňujú niektoré VŠ technického, matematického, ekonomického či prírodovedného zamerania. Od 1.1.2017 nadobudlo účinnosť Nariadenie vlády o stanovení odborov vzdelania, v ktorých je matematika skúšobným predmetom spoločnej časti maturitnej skúšky. Ide o žiakov gymnázií a lýceí, ktorí úspešne ukončia posledný ročník stredného vzdelávania s maturitou po 30.9.2020. Uvedené nariadenie sa mení Nariadením vlády o stanovení odborov vzdelania, v ktorých je matematika skúšobným predmetom spoločnej časti maturitnej skúšky, zo dňa 20.2.2017, doplnením o žiakov stredných odborných škôl, ktorí úspešne ukončia posledný ročník stredného vzdelávania s maturitnou skúškou po 30.9.2021.

Poľsko

Poľská maturitná skúška sa vzťahuje na absolventov gymnázií „Liceum“ od školského roku 2014/2015 a absolventov stredných technických škôl „Technikum“ od školského roku 2015/2016. Maturita z matematiky [2] ako povinného predmetu sa koná na základnej úrovni, pričom test trvá 170 minút a počet testových úloh je 34. Ak bola ako doplnkový predmet vybraná matematika, skúška sa vykonáva aj na vyššej úrovni, pričom trvanie testu je 180 minút a počet úloh v teste je 15. Úlohy matematickej skúšky môžu byť uzavreté alebo otvorené na oboch úrovniach. Jednou z funkcií maturitnej skúšky v Poľsku je fakt, že nahrádza prijímaciu skúšku na univerzity, ktoré používajú výsledky maturity v danom predmete/predmetoch (predovšetkým na pokročilej úrovni) ako kritériá v prijímacom procese. V prílohe č. 1 k uzneseniu Senátu o zmene podmienok a postupu prijímania do denného a externého štúdia v akademickom roku 2019/2020 zo 17. decembra 2018 sú uvedené fakulty, ktoré berú do úvahy výsledok maturitnej skúšky z matematiky. Ide o Fakultu humanitných vied, Fakultu politológie, Pedagogická fakultu a Matematicko-fyzikálna fakultu.

Maďarsko

Maturita z matematiky sa týka gymnázií, stredných odborných škôl a stredných technických škôl. Na webovej stránke Úradu pre vzdelávanie [4] sú informácie ohľadom dvojúrovňovej maturity z matematiky, ktoré platia od roku 2017. Podľa nich písomná maturita z matematiky na strednej úrovni trvá 180 minút. Uchádzači najprv vyplnia do 45 minút Pracovný list I, ktorý obsahuje 10 až 12 úloh. Potom vyplnia do 135 minút Pracovný list II, ktorý je rozdelený na dve časti, pričom každá obsahuje tri úlohy. Vyššia úroveň skúšky z matematiky trvá 240 minút. Písomná skúška je rozdelená na dve časti, kde časť I pozostáva zo 4 úloh, časť II sa skladá z 5 cvičení. V požiadavkách na vyššiu úroveň sú zahrnuté aj osobitné požiadavky, pretože táto úroveň sa používa na prípravu študentov na matematiku vo vysokoškolskom vzdelávaní. Podľa Nariadenia vlády Maďarskej republiky o postupe prijímania na vysoké školy z augusta 2019 sa počas prijímacieho konania na VŠ musia brať do úvahy výsledky z matematiky ako predmetu povinnej maturity. Sú tu uvedené zoznamy bakalárskych študijných programov v roku 2018, ktoré akceptujú pokročilú úroveň maturitnej skúšky z matematiky ako podmienku prihlásenia sa na VŠ.

Rakúsko

Informácie ohľadom povinnej maturity z matematiky pre gymnáziá (AHS) a SOŠ (BHS) sú uvedené na webovej stránke [5]. Na písomnej maturite z matematiky gymnazisti riešia 18 – 25 úloh typu 1 a 4 – 6 úloh typu 2. Úlohy typu 1 si vyžadujú základné vedomosti a zručnosti. Úlohy typu 2 sa týkajú vytvárania sietí základných zručností, sú rozsiahlejšie a kontextovejšie. Na písomnej maturite z matematiky pre SOŠ sú 2 časti: časť A obsahuje min. 4 úlohy a je založená na medzikultúrnom kontexte, časť B obsahuje 2 – 4 zložitejšie úlohy a je založená na školskom kontexte. Úlohy v časti B sú zamerané na tie špeciálne matematické základné zručnosti, ktoré sa považujú za nevyhnutné pre príslušnú školskú formu. Písomná skúška z matematiky trvá 4,5 hodiny; celkový výkon uchádzača, teda obe skúšky A aj B, sa posudzuje ako celok. Spolkové ministerstvo školstva, vedy a výskumu v Rakúsku vydalo vo februári 2019 Opatrenia v skúmanej oblasti Matematika (AHS), v ktorých vysvetľuje opatrenia na zlepšenie štandardizovaného testu zrelosti v oblasti matematiky pre gymnáziá. Ide aj o zefektívnenie riadenia času pre žiakov gymnázia zlúčením 2 častí skúšky, pričom sa získa jediná skúška z matematiky, ktorá zahŕňa zadania časti 1 aj časti 2 a ktorej pracovný čas je 270 minút.

Fínsko

Na jeseň 2016 sa vo Fínsku rozhodlo o harmonograme postupného zavádzania elektrifikácie maturitných predmetov. Matematika bola posledným predmetom na jar 2019. V opise digitálnej skúšky z matematiky [6] je uvedené, že test z matematiky trvá 6 hodín a vykonáva sa v uzavretom prostredí, teda počas testu nie je povolený prístup na internet. Odpovede sa píšu pomocou textového procesora alebo sa poskytujú priamo s nástrojmi spojenými s úlohou. K odpovediam je možné priložiť obrázky, schémy. Úlohy typu 1 testujú porozumenie a pochopenie pojmov. Patria sem napríklad otázky a úlohy s možnosťou výberu z viacerých odpovedí. V úlohách typu 2 kandidát preukazuje svoju schopnosť vytvárať odôvodnené a logické, dobre skonštruované odpovede. Pri niektorých úlohách je možné použiť funkciu písania vzorcov. Úlohy typu 3 testujú schopnosť matematicky popísať situáciu uvedenú v zadaní. Matematická skúška má 13 úloh, môže byť krátka aj dlhá, pričom obe formy majú dve časti: časť A a časť B, ktorá je rozdelená na B1 a B2. Pred maturitou je potrebné, aby sa študent oboznámil s príslušnými programami.

Singapúr

Na webovej stránke Skúšobnej a hodnotiacej rady v Singapure [1] sú dostupné informácie ohľadom maturitnej skúšky „GCE A-Level“ na konci dvojročného juniorského štúdia alebo trojročného kurzu centralizovaného inštitútu. V osnovách úrovne A na rok 2020 figuruje medzi **predmetmi aj** Matematika H1, Matematika H2, Ďalšia matematika H2 a Matematika H3. Skúška z Matematiky H1 trvá 3 hodiny, je zložená z časti A (5 otázok) a z časti B (6 – 8 otázok). Poskytuje študentom základy matematiky a štatistiky potrebné pri štúdiu obchodných alebo sociálnych vied na univerzite. Skúška z Matematiky H2 trvá 6 hodín a je zložená z 2 trojhodinových prác, pričom prvá práca má 10 – 12 otázok, druhá práca má 2 časti: časť A (4 – 5 otázok) a časť B (6 – 8 otázok). Je určená na prípravu študentov univerzitnej matematiky, prírodných vied a strojárstva. Skúška z Ďalšej matematiky H2 trvá 6 hodín a je zložená z 2 trojhodinových prác, pričom prvá práca má 10 – 12 otázok, druhá práca má 2 časti: časť A (5 – 6 otázok) a časť B (5 – 6 otázok). Je určená pre matematicky naklonených študentov, ktorí chcú byť vedcami, inžiniermi alebo inými odborníkmi na riešenie zložitejších problémov. Skúška Matematika H3 trvá 3 hodiny, tvorí ju 8 – 10 otázok, je určená pre budúcich študentov matematiky na univerzite.

Literatúra

[1] GCE A-level. Dostupné na https://www.seab.gov.sg/home/examinations/gce-a-level

[2] Informator o egzaminie maturalnym z matematyki od roku szkolnego 2014/2015. Warszawa, Centralna Komisja Egzaminacyjna, 2013. Dostupné na https://cke.gov.pl/images/_EGZAMIN_MATURALNY_OD_2015/Informatory/2015/Matematyka-19wrz.pdf

[3] Katalog požadavků zkoušek společné části maturitní zkoušky platný od školního roku 2015/2016. Matematika. Praha, CERMAT, 2014. Dostupné na https://maturita.cermat.cz/files/files/katalog-pozadavku/MA_Katalog_pozadavku_MZ-17-18.pdf

[4] Matematika. Dostupné na https://www.oktatas.hu/kozneveles/erettsegi/altalanos_tajekoztatas/erettsegi_vizsgatargyak#1

[5] Mathematik – Zentralmatura. Dostupné na https://www.zentralmatura.at/index.php/inhalt/zentralmatura#3

[6] Sähköinen Ylioppilastutkinto – Matematiikka. Dostupné na https://www.ylioppilastutkinto.fi/images/sivuston_tiedostot/Sahkoinen_tutkinto/fi_sahkoinen_matematiikka_28.11.2016.pdf

PaedDr. Monika Reiterová, PaedDr. Lujza Čipková Hamplová, PhD.
Štátny pedagogický ústav
P.O.Box 26
Pluhová 8
SK – 830 00 Bratislava
e-mail: monika.reiterova@statpedu.sk, lujza.hamplova@statpedu.sk

GEOMETRIA – KRITICKÉ MIESTO ŠKOLSKEJ MATEMATIKY (?)

LUCIA CSACHOVÁ

ABSTRAKT. *Príspevok je zameraný na dlhodobo nízku úspešnosť žiakov v úlohách z okruhu Geometria a meranie v testovaní T9. Je možné povedať na základe výsledkov z T9, že geometria je kritickým miestom školskej matematiky?*

Ciele celoslovenských testovaní matematiky

Celoslovenské testovania matematiky ako T5, T9 či externá časť maturity sa stali súčasťou etapy hodnotenia matematického vzdelávania na Slovensku. Každé z nich má viacero cieľov, z ktorých sa jeden – porovnanie žiakov a škôl medzi sebou (a následné vytváranie „rebríčkov“) – stal v očiach časti verejnosti cieľom, ak nie jediným, tak aspoň najdôležitejším. Ako uvádza NÚCEM vo svojich správach (napr. (NÚCEM, 2019)) k cieľom patrí ale aj napr. objektívne ohodnotenie zručností, vedomostí a kompetencií žiakov na výstupe z danej úrovne vzdelávania, resp. ohodnotenie pripravenosti na vstupe pre ďalšiu úroveň, či prispenie k skvalitňovaniu vzdelávacieho procesu.

Kritické miesta školskej matematiky

Jednou z možností ako skvalitniť vzdelávací proces je upozorniť budúcich i súčasných učiteľov matematiky (a matematickú ale i laickú verejnosť) na vedomosti a zručnosti žiakov požadované Štátnym vzdelávacím programom, ktorých dosiahnutá úroveň sa javí ako nedostatočná, a na oblasti, v ktorých sa táto nedostatočnosť často a opakovane prejavuje. Takéto oblasti sú nazývané napr. v (Rendl, Vondrová, 2013) *kritickými miestami školskej matematiky.*[1]Ak učiteľ o týchto kritických miestach vie, tak im môže viac času venovať vo vzdelávacom procese, prípadne zmeniť k nej rokmi zaužívaný prístup.

Jedným z cieľov nášho výskumu je určenie takýchto kritických miest školskej matematiky na Slovensku na základe kvantitatívnej a kvalitatívnej analýzy výsledkov žiakov z matematiky v testovaní T9 za obdobie 2015–19.Počas obdobia piatich rokov sa v jednotlivých rokoch počet testovaných žiakov na výstupe z úrovne ISCED 2 pohyboval od 36 381 v roku 2018 (najnižší počet v sledovanom období) až po 40 880 v roku 2015 (najvyšší počet).Kvôli takémuto veľkému rozsahu skúmaného súboru, pokrytiu celého Slovenska, i opakovanému (v niektorých prípadoch i každoročnému) zaradeniu preverenia určitých vedomostí a zručností považujeme výsledky testovania T9 za veľmi vhodné pre určenie problematických, teda kritických miest školskej matematiky na Slovensku. Tejto problematike sme sa už venovali napr. v (Csachová, Jurečková, Gunčaga, 2017) alebo (Csachová, Gunčaga, Jurečková, 2017).

Každoročne bolo v T9 zaradených 20 testových položiek, tento rok bol počet zvýšený na 30. Položky sú rozdelené do nasledujúcich piatich tematických okruhov v súlade

[1] (Rendl, Vondrová, 2013, str. 7-8) „... oblasti, v nichž žáci často a opakovaně selhávají, jinak řečeno, která nezvládnou na takové úrovni, aby se jejich matematická gramotnost produktivně rozvíjela a také aby mohla byt tvořivě užívána v každodenním životě.“

s inovovaným Štátnym vzdelávacím programom: 1. Čísla, premenná, počtové výkony s číslami, 2. Vzťahy, funkcie, tabuľky, diagramy, 3. Geometria a meranie, 4. Kombinatorika, pravdepodobnosť, štatistika, 5. Logika, dôvodenie, dôkazy. Ako jeden z prvých faktorov sme si zvolili obtiažnosť položiek zaradených do testovania a následné určenie tematického okruhu s úlohami s najvyššou obtiažnosťou. V sledovanom období bola priemerná úspešnosť žiakov najnižšia v tematickom okruhu Geometria a meranie v troch rokoch – 2015, 2016 a 2018.Priemerné hodnoty úspešnosti žiakov v okruhu Geometria a meranie a celková úspešnosť v T9 počas jednotlivých rokov sú spracované v tabuľke 1. Otázka znie: je alebo nie je školská geometria kritickým miestom?

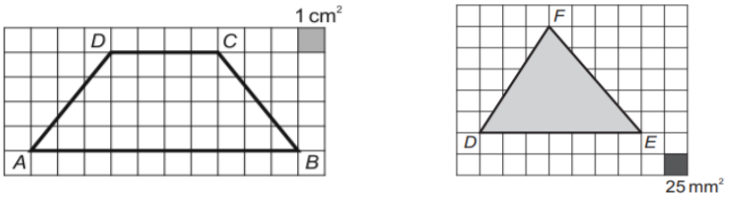
Rok	2015	2016	2017	2018	2019
Priemerná úspešnosť v T9 (v percentách)	52,7	52,8	56,4	55,9	63,1
Priemerná úspešnosť v okruhu Geometria a meranie (v percentách)	44,1	42,5	51,0	47,9	63,2

Tabuľka 1: Priemerná úspešnosť v T9 a úspešnosť v tematickom okruhu Geometria a meranie v rokoch 2015-19. (zdroj: správy NÚCEM-u k jednotlivým ročníkom, ww.nucem.sk)

Vybrané úlohy z oblasti *Geometria a meranie*

V tejto časti príspevku by sme radi upozornili na dve vybrané úlohy z okruhu *Geometria a meranie*, ktoré považujeme za zaujímavé z pohľadu určovania problematických oblastí.

Určenie obsahu rovinného útvaru zadaného v štvorcovej sieti so známym obsahom jedného štvorca alebo dĺžkou jeho strany bolo cieľom napríklad v úlohách na Obr. 1. Zatiaľ čo úloha z roku 2015 je charakterizovaná ako ľahká (Obr. 1a), žiaci v nej dosiahli priemernú úspešnosť 69,2 %, úloha z roku 2016 už ako obťažná s priemernou úspešnosťou riešenia len 21,7 %(Obr. 1b) a neriešenosťou23%. Samozrejme k vyššej úspešnosti prvej úlohy prispieva to, že je to úloha uzavretá s výberom jednej správnej odpovede. Ak sa ale bližšie pozrieme na rozdiely v zadaní, trojuholník v štvorcovej sieti je v porovnaní s lichobežníkom „nepriehľadný“, čo mohlo žiakom spôsobiť problémy pri „odčítaní“ výšky. Podľa nášho názoru ale najväčšie problémy žiakom spôsobilo zadanie obsahu jedného štvorčeka v milimetroch štvorcových (25 mm^2), pričom požiadavka bola, aby výsledný obsah trojuholníka bol uvedený v centimetroch štvorcových. Predpokladáme, že väčšina žiakov, ktorí neuviedli správny výsledok, urobili chybu pri premieňaní jednotiek buď v úvode riešenia (z milimetrov na centimetre) alebo v závere (z milimetrov štvorcových na centimetre štvorcové), prípadne výsledok nepremenili na požadovanú jednotku obsahu.



Obrázok 1: a) 20/2015 Obsah štvoruholníka ABCD znázorneného v štvorcovej sieti sa rovná: A 22 cm^2, B 24 cm^2, C 28 cm^2, D 56 cm^2, b) 07/2016 Každý štvorec siete má obsah 25 mm^2. Vypočítajte obsah trojuholníka DEF v cm^2. Výsledok vyjadrite v tvare desatinného čísla s presnosťou na tri desatinné miesta. (zdroj: www.nucem.sk/sk/merania/narodne-merania/testovanie-9)

Záver

Na základe výsledkov z testovania T9 nie je možné povedať, že celá školská geometria je určite kritickým miestom matematiky. V sledovanom okruhu za dané obdobie sa vyskytujú položky obťažné, stredne obťažné ale aj ľahké. Sú ale vedomosti a zručnosti spojené s riešením úloh z okruhu Geometria a meranie, v ktorých žiaci naozaj často a opakovane zlyhávajú. Preto by im bolo potrebné venovať viac pozornosti na hodinách matematiky.

Ako problematické sa nám javia nasledujúce testované vedomosti a zručnosti v T9:

- premena jednotiek,
- použitie Pytagorovej vety,
- čítanie údajov (prvkov a vzťahov medzi nimi) z obrázku v zadaní úlohy,
- úlohy súvisiace s povrchom a objemom telies.

K tomuto zoznamu môžeme pripojiť aj konštrukčné úlohy, na základe vlastných skúseností, ale i napr. výsledkov z už spomínaného výskumu zhrnutého v (Rendl, Vondrová, 2013).

Poďakovanie: Článok vznikol s podporou projektu VEGA 1/0079/19 (*Analýza kritických miest v školskej matematike a identifikácia faktorov ovplyvňujúcich postoj žiakov k matematike*). Za poskytnutie údajov a zadaní úloh ďakujeme NÚCEM-u.

Literatúra

[1] Csachová, L., Jurečková, M., Gunčaga, J.: *Educational Research on the Mathematical Competence,* In Patternson, K. (ed.): Focus on Mathematics Education Research, NOVA Science Publishers, pp. 31 – 62, 2017,ISBN 978-1-53611-826-1

[2] Csachová, L., Gunčaga, J., Jurečková, M.: *Evaluácia matematických kompetencií absolventov základných škôl,*In Obzory matematiky, fyziky a informatiky, vol. 46, No. 3, str. 1-10, 2017, ISSN 1335-4981

[3] Rendl, M., Vondrová, N. a kol., *Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů*, Praha: PedF, Univerzita Karlova, 2013,ISBN 978-80-7290-723-6

[4] NÚCEM: *Externá časť maturitnej skúšky v školskom roku 2018/2019 (Výsledky)*. Bratislava: 2019. Dostupné online: https://www.nucem.sk/dl/4435/Prezentacia_MS-2019_na%20zverejnenie.pdf

RNDr. Lucia Csachová, Ph. D.
Katedra matematiky, Pedagogická fakulta
Katolícka univerzita, Hrabovská cesta 1
SK – 034 01Ružomberok
e-mail: lucia.csachova@ku.sk

DVE HRY S ČÍSLAMI

VIERA ČERŇANOVÁ

ABSTRAKT. *Príspevok prináša dve didaktické hry, ktoré je možné bez náročnej prípravy zaradiť do vyučovania matematiky na 2. stupni ZŠ a na strednej škole. Pri obidvoch hrách si žiaci precvičia niektoré pojmy a vzťahy z teórie čísel. Okrem toho môžu naplno využiť svoje pozorovacie schopnosti.*

Retiazka zo štvorcov

Učitelia stredných aj vysokých škôl pozorujú, že terajší študenti nemajú návyk vopred zjednodušiť číselné ani algebrické výrazy, s ktorými majú pracovať. Študenti však nenesú hlavný podiel zodpovednosti za tento stav. Ten je dôsledkom toho, že hodinová dotácia matematiky na nižších stupňoch vzdelávania sa znižuje a navyše, od prvej triedy základnej školy vedieme žiakov k tomu, aby pri výpočtoch používali kalkulačky.[2] Žiaci si tak nevycvičia schopnosť „vidieť" napríklad 64 ako 8×8 alebo 121 ako 11^2. A tak študent – neraz aj výborný študent vysokej školy – pri úprave zlomku, v ktorom je v čitateli aj v menovateli súčin menších čísel, najskôr mechanicky roznásobí a až potom zisťuje, či je možné zjednodušiť krátením. Tým si svoj výpočet zbytočne komplikuje a riskuje, že sa následne dopustí chyby. Výpočet začínajúci

$$\frac{121 \times 64}{24 \times 77} = \frac{7744}{1848} = \cdots$$

je v súčasnosti bežný, hoci je jednoduchšie a spoľahlivejšie postupovať takto:

$$\frac{121 \times 64}{24 \times 77} = \frac{11 \times 11 \times 8 \times 8}{3 \times 8 \times 7 \times 11} = \cdots$$

Aktivita *Retiazka zo štvorcov*, nenáročná na prípravu i materiálne prostredie (miestnosť – trieda; pomôcky – papier, pero, kalkulačka), je vhodná na trénovanie tejto zanedbanej schopnosti bez memorovania.

Odporúčame hrať, čiže vytvárať retiazku, vo dvojiciach. Účastníci nebudú protihráči, ale spoluhráči s tým istým cieľom. Vo dvojici je vytváranie retiazky zábavnejšie, spoluhráči si pomáhajú a zároveň dohliadajú, aby ani jeden neurobil chybu.

Vstup

Ľubovoľná nenulová cifra, napríklad 3.

Cieľ

Podľa nasledujúcich pravidiel vytvoriť čo najdlhšiu konečnú postupnosť (retiazku) čísel, z ktorých každé je druhou mocninou prirodzeného čísla a je dvoj- alebo trojciferné. Čísla v retiazke budeme volať *štvorce*.

[2] Nie som zástancom bezduchého mechanického počítania či dokonca odriekania výsledkov matematických operácií, akoby to bola básnička. Avšak určitú schopnosť „vidieť" bez pomoci kalkulačky považujem za vhodnú a užitočnú.

Pravidlá

1. Prvý štvorec v retiazke má na prvom mieste danú cifru, v tomto prípade 3. Jeho posledná cifra je zároveň prvou cifrou nasledujúceho štvorca. Hráči pripisujú ďalšie štvorce podľa toho istého kľúča: posledná cifra predchádzajúceho je prvou cifrou nového štvorca.
2. Nie je nutné, aby sa hráči pri pripisovaní štvorcov striedali.
3. Žiaden štvorec sa v retiazke nesmie vyskytnúť viackrát.
4. V retiazke nesmie byť číslo, ktoré nie je štvorcom.

Vyhodnotenie

Keď už dvojica nedokáže pridať štvorec do retiazky alebo keď vyprší určený čas, vymení si papier, na ktorý zapisovala retiazku, s inou dvojicou. Každá z dvojíc preverí, či sú v postupnosti čísel napísanej druhou dvojicou dodržané pravidlá pre retiazku. Ak áno, za každé číslo v retiazke pridelí vopred určené bodové ohodnotenie. Ak nie je dodržané niektoré pravidlo, potom budú body pridelené iba za časť retiazky pred chybným miestom. Žiadne číslo, počnúc nesprávnym, sa nezapočíta do dĺžky retiazky. Takto si žiaci precvičia vytváranie a overovanie retiazky dvakrát.

Príklad

Táto retiazka má dĺžku 9:

$$(3)\sim 36\sim 64\sim 49\sim 961\sim 121\sim 16\sim 625\sim 576\sim 676$$

S cifrou 3 na vstupe je možné vytvoriť aj dlhšiu retiazku:

$$(3)\sim 36\sim 64\sim 441\sim 121\sim 16\sim 625\sim 529\sim 961\sim 196\sim 676$$

Keďže k dispozícii je dostatok cifier pre začiatok retiazky, hru môžeme zaradiť do vyučovacej hodiny opakovane. Po 2–3 opakovaniach hry bude vhodné vyzvať žiakov, aby si všímali čísla, ktoré sú štvorcami, a aby si zapísali, čo ich zaujalo. Je možné, že žiaci nás na niektoré zaujímavosti spontánne upozornia ešte predtým:

- Cifry 2,3,7,8 nie sú nikdy posledné.
- Štvorce 121 a 676 sú rovnaké spredu aj odzadu (palindromy).
- Štvorce 144 a 441, ale aj 169, 196, 961 sú permutáciami tých istých cifier.
- Štvorce676 a 576 sa líšia o 100, čo je tiež štvorec.
- Rovnako je rozdiel štvorcov 841 a 441 štvorcom 400.

Posledné dve pozorovania otvárajú príležitosť prepojiť čísla s geometriou prostredníctvom pytagorejských trojuholníkov.

„Človeče, nehnevaj sa“ trochu inak

Okrem všeobecných cieľov spoločných pre didaktické hry, ako sú

- posilnenie motivácie žiaka a jeho kladného vzťahu k predmetu
- dosiahnutie čo najväčšieho edukačného prínosu v uvoľnenej atmosfére hry
- rozvoj sociálnych väzieb medzi žiakmi

je cieľom tejto hry precvičenie a upevnenie pojmov *prvočíslo, deliteľ* a *vlastný deliteľ* čísla. Hru je možné využiť napríklad na začiatku školského roka namiesto klasického opakovania príslušného učiva.

Materiálne prostredie

Zo spoločenskej hry *Človeče, nehnevaj sa* potrebujeme toľko hracích plánov spolu s kockami a panáčikmi, koľko skupín zamýšľame v triede vytvoriť. V jednej skupine by mali byť traja – štyria hráči. Okrem toho si pripravíme malé jednofarebné nálepky. Na príprave sa veľmi radi podieľajú samotní žiaci.

Na tabuľu napíšeme šesť čísel, z ktorých je väčšina iná, než sú zvyčajné počty bodiek na hracej kocke. Každá skupinka napíše tieto čísla na nálepky, ktoré nalepí na jednotlivé steny kocky. Svojim študentom som dala čísla 5,6,9,10,12,15.

Pravidlá hry

Hráči hrajú podľa štandardných pravidiel hry *Človeče, nehnevaj sa*, avšak počet políčok, o ktoré smú posunúť figúrku, je niektorý vlastný deliteľ čísla, ktoré padlo pri hode kockou. Napríklad, ak padlo číslo 12, hráč môže premiestniť svoju figúrku o 1,2,3,4 alebo 6 políčok.

Vyhodnotenie a otázky

Za účasť v hre odporúčam prideliť rovnaké ohodnotenie všetkým. Ďalšie body môžu žiaci získať za svoje pozorovania, za návrhy pre úpravu pravidiel hry, za odpovede na otázky ... Tie môžu byť napríklad:

- Ktorému číslu ste sa najviac potešili, keď padlo?
- Ktoré číslo bolo najmenej obľúbené?
- Ktoré iné číslo / čísla by dávali to isté ako 5?
- Ktoré čísla dávajú rovnaký počet možností ako 9?
- Ako by ste navrhli upraviť pravidlá hry, aby sa využili aj ostatné vlastné delitele?

Táto hra má nezanedbateľný edukačný prínos, no výraznejší herný ráz v porovnaní s predošlou.

RNDr. Viera Čerňanová, PhD.
Katedra matematiky a informatiky,
Pedagogická fakulta Trnavskej univerzity
Priemyselná 4 , SK – 918 43 Trnava
e-mail: vieracernanova@hotmail.com

SPOLOČENSKÉ HRY NA MATEMATIKE

IVONA DEMČÁKOVÁ

ABSTRAKT. *Hodiny matematiky nemusia byť iba o počítaní príkladov, ale na spestrenie môžeme využiť aj spoločenské hry. Na dielni sme si ukázali niekoľko hier, ktoré využívajú matematiku, či logické myslenie. Rovnako sú tieto hry vhodné aj na krúžok matematiky. Najdôležitejšou časťou dielne bolo, že sme si spoločenské hry aj zahrali.*

Spoločenské hry

Hranie spoločenských hier je veľmi prínosné pre rozvoj kompetencií ako kooperácia, rýchle reakcie, predvídanie, komunikačné schopnosti či logické a kritické myslenie. „Prostredníctvom vhodne zvolených hier sa rozvíja u žiaka pamäť a predstavivosť, zvyšuje sa koncentrácia pozornosti. Deti pomenúvajú vlastnosti a znaky predmetov, opisujú ich a klasifikujú. Primeraná náročnosť didaktických hier umožňuje rozvoj myslenia a reči, zvyšuje aktivitu myslenia, rozvíja tvorivý spôsob uvažovania, rozširuje sa skúsenosť žiaka, prehlbujú sa rozumové schopnosti.“ [1]

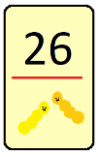
Na hodinách matematiky však chceme hrať hry, ktoré budú využívať aj matematiku. Takými sú napríklad Heckmeck, Continuo, Abaku, Mathable, 6 bere, Ježkovi oči či ďalšie iné. V príspevku opíšeme niektoré hry a navrhneme, ako si vyrobiť vlastnú verziu hier, ktoré sú nedostupné.

Heckmeck

Popis k tejto hre nájde na stránke https://www.ihrysko.sk/heckmeck-pickomino-cerviky-p2659

V hre sa vžijeme do postavičiek sliepok, ktoré si svoju večeru grilujú. Každá z nich sa snaží úspešne si ugrilovať čo najviac červíkov. Úlohou hráča je hádzaním kociek zbierať porcie z grilu. Treba však byť opatrný, pretože porcie na grile sa môžu aj spáliť. Celé pravidlá sú dostupné na https://www.ihrysko.sk/files/product_pdf/Heckmeck-SK.pdf

Keďže je hra dlhodobo nedostupná, pokúsime sa ju vyrobiť si z vlastných zdrojov. Budeme potrebovať 7 kociek, domino kocky alebo kus kartónu, z ktorého si vyrobíme žetóny s červíkmi. V hre sa používajú špeciálne kocky, ktoré majú čísla od 1 do 5 a znak červíka. Na všetkých našich kockách si znak červíka nalepíme na pozíciu šestky.Červík má v hre hodnotu 5. V každom ťahu je potrebné zobrať si okrem čísel aj aspoň jedného červíka.



Obrázok 1: Príklad vlastného žetónu

Potrebujeme si ešte vyrobiť čísla, modely červíkov, ktoré sa grilujú. Jednou z možností je využiť domino kocky, na ktorých prelepímerub. Potrebujeme vytvoriť 16 dielov s číslami od 21 do 36. Postupne po štvoriciach sa na číslach zväčšuje aj počet červíkov od 1 až po 4.

Ak nemáme dostupné domino kocky, môžeme si z kartónu vystrihnúť obdĺžniky s rozmermi 2 x 5 cm. Z jednej strany na ne nalepíme obrázky čísel. Na obrázku 1 uvádzame možnú verziu vlastných žetónov.

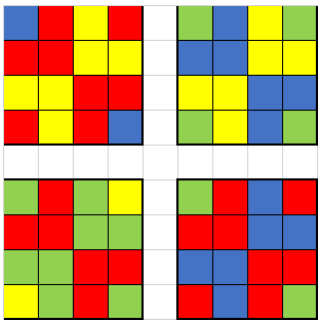
Žetóny sa uložia od najmenšej hodnoty po najväčšiu a máme pripravenú hru. Hra je určená pre 2 až 7 hráčov, pričom optimálny počet je 4. Takouto formou si vieme vyrobiť viac verzií a naraz sa tak v triede môžu hrať viaceré tými.

Hru majú radi aj mladšie deti, ale rovnako dobre sa ju zahrali aj starší žiaci. Hru sme hrali s mladšími žiakmi – šiestakmi, ktorí riešili hru intuitívne, nad možnosťami ťahov veľa nepremýšľali. Starší žiaci – prváci na strednej škole, však už hlbšie rozmýšľali nad ďalším ťahom, premysleli si svoj postup, zamýšľali sa nad pravdepodobnosťou padnutých čísel. So staršími žiakmi môžeme vypočítavať pravdepodobnosti jednotlivých ťahov.

Continuo

Ďalšia zaujímavá hra, ktorú sme hrali na pracovnej dielni, je Continuo. V hre sa nachádzajú kartičky, ktoré majú pole rozdelené na menšie štvorce. Každá kartička má rôzne vyfarbené políčka farbami červená, žltá, modrá a zelená. Postupným prikladaním kartičiek sa hráč snaží vytvoriť čo najdlhšieho farebného hada a získať čo najviac bodov. Popis k hre je dostupný nahttps://www.ihrysko.sk/continuo-p7706

Pri písaní článku sme zistili, že hra je bohužiaľ tiež nedostupná. Vieme si ju tiež vyrobiť sami. Potrebovať budeme kartón, papier a farbičky, prípadne si obrázky vytlačíme a nalepíme na kartón. Z kartónu si nastriháme 42 štvorcov s rozmermi 4 x 4 cm. Každý štvorec rozdelíme na 16 menších štvorcov. Odporúčame na kartón nalepiť čisté papiere rovnakých rozmerov, pretože potom sa nám budú lepšie vyfarbovať jednotlivé štvorčeky. Použijeme červenú, žltú, modrú a zelenú farbičku a vytvoríme jedinečných 42 kartičiek. Na obrázku 2 uvádzame niekoľko možností vyfarbenia



Obrázok 2: Možné vyfarbenia kartičiek

Všetky kartičky otočíme vyfarbenou stranou smerom dole a pre 2 a 3 hráčov začneme s 3 kartičkami a pre viac hráčov otočíme úvodné dve kartičky. Úvodné kartičky spojíme do začiatočnej pozície, ku ktorej budú hráči postupne prikladať svoje kartičky. Následne postupne hráči otočia jednu kartičku, ktorú musia priložiť tak, aby vytvorili najdlhšieho možného hada. Spočítajú sa všetky body za vzniknutých hadíkov a pokračuje ďalší hráč. Hra končí umiestnením všetkých kartičiek. Po záverečnom spočítaní bodov vyhráva hráč s najvyšším skóre.

Keďže pravidlá vyžadujú rýchlu reakciu a nepovoľujú príliš dlhé rozmýšľanie nad priložením kartičky, je hra vhodná pre všetky vekové kategórie. Menšie deti však potrebujú

viac času, aby si premysleli svoj ťah. Hra okrem rýchleho premýšľania podporuje aj hľadanie schém, či spočítavanie kladných čísel, pri počítaní skóre.

6 bere

Pre nás najobľúbenejšou hrou je 6 bere. Na zábavnom kontexte zbierania kráv sa žiaci precvičujú v jednoduchých počtových operáciách a zlepšujú vnímanie postupnosti čísel. Hra obsahuje 104 kartičiek s číslami, pričom na každej je aspoň jedna krava. Niektoré karty obsahujú aj 3, 5 či 7 kráv. Hráč sa snaží umiestniť svoje karty do radov tak, aby neprikladal svoju kartu ako šiestu. Príklad rozohranej partičky je aj na obrázku 3.

Obrázok 3: Rozohraná hra 6 bere (zdroj https://www.mall.sk/kartove-hry/albi-sesta-bere)

Ak sa tak stane, že hráč musí priložiť šiestu kartu v rade, berie predchádzajúcich 5 kariet a jeho karta sa umiesti na začiatok radu. Po desiatich kolách si hráči spočítajú svoje pozbierané kravy a vyhráva hráč s najmenším počtom. Viac informácií je dostupných na https://www.ihrysko.sk/files/product_pdf/6-bere.pdf

Hra je určená pre 2 až desiatich hráčov, ale najviac sa zabavia deti pri počte 4 až 6 hráčov. Hra je rýchla, zábavná a žiakom neprekážajú ani počtové operácie, ktoré sa vyžadujú. Je potrebné zvoliť správnu stratégiu vykladania kariet a odhadovať ťah spoluhráčov.

Literatúra

[1] Labjaková, Iveta: *Didaktické hry vo vyučovaní matematiky v primárnom vzdelávaní* , Bratislava, Metodicko-pedagogické centrum v Bratislave, 2013, ISBN 978-80-8052-565-1

Mgr. Ivona Demčáková
FMFI UK
Mlynská dolina
SK – 842 48 Bratislava
e-mail: ivona.demcakova@fmph.uniba.sk

DOMÁCA PRÍPRAVA ŠTUDENTOV NA HODINY MATEMATIKY TROCHU INAK

BARBORA DJUBAŠÁKOVÁ

ABSTRAKT: *Domáca príprava študentov na hodiny matematiky nemusí byť len opakovacieho charakteru, ale v rámci nej sa môžu naučiť aj niečo nové s pomocou tabletu, mobilu alebo počítača. V krátkom príspevku sa dozviete o tom, ako možno získať na hodinách matematiky viac času na riešenie problémových úloh, ale aj precvičovanie praktických zručností. Pokúsime sa ukázať, ako možno vyučovať tematický celok "Štatistika" na strednej škole s využitím domácej prípravy študentov na hodiny matematiky.*

Na úvod

V rámci dizertačnej práce sa zaoberáme efektívnym začleňovaním matematických mobilných hier do vyučovacieho procesu, teda vyučovacou metódou **Mobile Learning**. Pri zisťovaní tejto efektívnosti sme zaradili hru *Statistico* z mobilnej aplikácie *Apps in Math*[3] do vyučovania predmetu matematika na strednej škole (gymnáziu). Hry sme zaradili do vyučovania matematiky v štyroch rôznych triedach, zakaždým do inej fázy vyučovacej hodiny: v rámci domácej prípravy na vyučovanie, motivačno-expozičná fáza hodiny, opakovacia (fixačná) fáza hodiny a nezaradená mobilná hra (kontrolná skupina). Počas testovania zaradenia hry do vyučovania a pozorovania vyučovacích hodín sme si všimli, že študenti, ktorí s hrou pracovali doma, mimo vyučovacej hodiny, sa aktívnejšie zapájali do diskusie s učiteľom, rýchlejšie a správnejšie reagovali na otázky učiteľa. Dokonca hneď vedeli čomu neporozumeli, a čo potrebujú ešte vysvetliť. Samotní študenti sa priaznivo vyjadrovali o hre, aj o netradičnej domácej úlohe, ktorá bola ešte z neprebraného učiva. Ako najväčšie pozitíva študenti uvádzali, že pri "riešení" domácej úlohy nepotrebovali hľadať pomoc v zošite, učebnici, ani na internete, a že mali okamžitú spätnú väzbu o správnosti ich riešenia. Prekvapením pre nás bolo, že aj v krátkom vedomostnom teste dosiahli najvyššie priemerné skóre v porovnaní s ostatnými výskumnými skupinami. Práve toto bol okamih, keď sme sa začali zaujímať aj o vyučovací model **FlippedLearning**.

FlippedLearning

FlippedLearning (ďalej len ako FLR) alebo častokrát označovaný aj ako FlippedClassroom, nie je samo o sebe vyučovacou metódou, ale skôr modelom vyučovania. V podstate ide o prevrátený model vyučovania. Aktivity určené na domácu úlohu sa riešia v škole na vyučovaní a tie určené na vyučovanie študenti riešia sami doma (mimo vyučovania). Presná definícia FlippedLearning-u, ktorá je dostupná na webovej stránke organizácie zaoberajúcej sa týmto modelom vyučovania[4], je však rozsiahlejšia. Teda na základe nej môžeme povedať, že „FLR je model výučby, v ktorom sa priamy výklad vyučujúceho presúva zo skupinového vzdelávacieho priestoru do individuálneho vzdelávacieho priestoru a vzniknutý skupinový priestor sa mení na dynamické interaktívne vzdelávacie prostredie, kde učiteľ vedie študentov, ktorí aktívne aplikujú poznatky a tvorivo sa zapájajú do výučby predmetu“ (Matušková, 2019).

[3]Dostupný odkaz na aplikáciu: https://www.project-aim.eu/slk/na-stiahnutie [online: 2019-10-10].

[4] Voľný preklad definície z originálu dostupnom on-line na webovej stránke organizácie FlippedLearningNetwork: https://flippedlearning.org/definition-of-flipped-learning/ [online: 2019-10-10].

Vyučovanie Štatistiky v modeli FlippedLearning

Po dôkladnom teoretickom naštudovaní modelu FLR sme si položili niekoľko otázok:

- Je FLR vhodný na hodiny matematiky?
- Zvládnu sa študenti pripravovať na hodiny matematiky vopred?
- Dá sa vôbec týmto modelom vyučovania vyučovať matematika?

Rozhodli sme sa nájsť odpovede na tieto otázky a preskúmať aplikovanie vyučovacieho modelu FLR do matematiky strednej školy. Konkrétne do tematického celku *Štatistika*. Následne sme na základe požiadaviek FLR začali pripravovať návrhy vyučovacích hodín aj spolu s materiálom určeným na domácu prípravu pre študentov a metodickým listom pre učiteľov. Celkovo sme vypracovali 11 modelov vyučovacích hodín, v ktorých je obsiahnutý celý tematický celok *Štatistika*.

Ako vlastne prebiehala vyučovacia hodina v modeli FlippedLearning? V krátkosti si opíšeme jednu takúto vyučovaciu hodinu, ktorej téma bola ˝Modus a medián štatistického súboru˝ (5. hodina daného tematického celku). V prvom rade je študentom v dostatočnom časovom intervale pred danou vyučovacou hodinou pridelený materiál určený na domácu prípravu. Najlepšie hneď po predchádzajúcej hodine matematiky. Študenti sa mali zahrať hru *Statistico* z mobilnej aplikácie *Apps in Math*. Odporúčali sme im zahrať hru aj viackrát, pokiaľ neporozumejú pojmom modus a medián. Okrem hry sme vytvorili aj prezentáciu na ozrejmenie týchto pojmov, ako ekvivalentný materiál. Vyučovacia hodina bola učiteľom rozdelená na tri časti. V prvej časti (15 minút) sa učiteľ venoval len mediánu, v druhej časti len modusu a v tretej úlohám zameraným aj na medián aj na modus. Medián štatistického súboru študenti vysvetľujú na základe hry, nezabúdajú zdôrazniť usporiadanie prvkov. V triede je navodená diskusia, na konci ktorej im to učiteľ celé zhrnie, nadiktuje definíciu mediánu a zavedie označenie med(x). Podobný spôsob komunikácie prebieha aj pri pojme modus. Posledných 15 minút sa riešia úlohy zamerané na charakteristiky polohy štatistického súboru. Učiteľ zámerne zadáva súbor s extrémnymi hodnotami a navodzuje diskusiu o tom, ako tieto hodnoty ovplyvňujú spomínané charakteristiky polohy. Veľký záujem spôsobí u žiakov premostenie na plat a pohor v zamestnaní. Danú vyučovaciu hodinu zhodnotil pozitívne aj samotný učiteľ. Mal dojem, že študenti sa viac pýtajú, viac reagujú a viac sa zaujímajú o učivo, ako na iných hodinách matematiky. Nasledujúca vyučovacia hodina bola na tému "Harmonický a geometrický priemer" (6. hodina). Študenti pred touto vyučovacou hodinou dostali na domácu prípravu materiál v podobe ppt-prezentácie a taktiež si mali načítať príslušné strany z učebnice matematiky. Odhadovaný čas strávený touto domácou prípravou je 15 minút. Začiatok vyučovacej hodiny bol venovaný aritmetickému priemeru a tomu, aký je rozdiel medzi aritmetickým priemerom z početnosti a váženým aritmetickým priemerom. To či študenti porozumeli aj geometrickému a harmonickému priemeru, učiteľ zisťuje v priebehu hodiny. Prostredníctvom dataprojektoru sa študentom premietnu zadania úloh. Prvá je riešená spoločne na tabuľu, ostatné študenti riešia v dvojiciach v lavici. Učiteľ sa im venuje individuálne. V závere hodiny je zhrnutie a krátka diskusia o riešeniach zadaných úloh.

Záver

Podľa nášho názoru model FlippedLearning je vhodný spôsob vyučovania aj na predmet matematika. Výhodou FLR je, že berie ohľad na rôzne učebné štýly, sám študent sa rozhodne kde a kedy sa bude pripravovať na hodiny matematiky. Daným materiálom môže prechádzať aj opakovane, vrátiť sa ku ktorejkoľvek časti a pod. Podporuje a rozvíja individuálne samoštúdium študentov, ako sa majú efektívne učiť, čím ich pripravuje na

vysokoškolské štúdium. V neposlednom rade FLR poskytuje na hodinách viac času na riešenie problémových úloh a prepočítavanie, ale taktiež má učiteľ priestor uplatňovať individuálny prístup k slabší študentom. Pozitívnu reakciu na vyučovanie Štatistiky v modeli FLR sme zaznamenali aj zo strany samotných študentov, ktorý sa nasledovne vyjadrili:

- *„Bolo to dobre, lebo sme prišli pripravenejší na hodinu, prijala by som to aj z iného predmetu.“*
- *„Nerada sa učím doma, ale domáce štúdium bolo v pohode. Vedeli sme aspoň na hodine, o čo sa jedná.“*
- *„Myslím si, že nás to učí samostatnej práci.“*
- *„Tento spôsob bol zaujímavým ozvláštnením. Aspoň sa veci na hodinách hýbali rýchlejšie a stihli sme viac prebrať.“*

Nemyslíme si, že tento spôsob vyučovania je jednoduchý a ľahký. Práve naopak začiatky sú náročné. Taktiež vieme, že tvorba materiálu určeného pre študentov na domácu prípravu môže byť časovo náročnejšia. Rozhodli sme sa vám vytvorené modely vyučovacích hodín aj s materiálom pre študentov sprístupniť na internetovej stránke[5], kde si to môžete pozrieť, stiahnuť a následne používať. Ak by ste sa chceli niečo viac dozvedieť o tvorbe materiálu, realizácií testovania týchto modelov alebo priebehu vyučovacích hodín, tak všetko je podrobne spísané v práci *"Vyučovacia metóda FlippedClassroom na hodinách štatistiky strednej školy"* (Matušková, B., 2019).

Literatúra

[1] Matušková, B. (2019). *Vyučovacia metóda FlippedClassroom na hodinách štatistiky strednej školy* [Rigorózna práca]. Bratislava: Univerzita Komenského, Fakulta matematiky, fyziky a informatiky.

[2] FlippedLearningNetwork, *FlippedLearning*, 2014 [online], [cit. 2019-10-10]. Dostupné na internete: <https://flippedlearning.org/>

[3] Barbora Djubašáková (2019). Osobná stránka. [online], [cit. 2019-10-12]. Dostupné na internete: <http://enjoymaths.education/personal/djubasakova-barbora>

[4] Apps in Math (2015). *Project*. [online]. [cit. 2019-10-10]. Dostupné na internete: <https://www.project-aim.eu/slk>

PaedDr. Barbora Djubašáková
KAG FMFI UK
Mlynská Dolina 6284
SK – 842 48 Bratislava
e-mail: barbora.djubasakova@gmail.com

[5] Odkaz na osobnú internetovú stránku s materiálom: http://enjoymaths.education/personal/djubasakova-barbora[online: 2019-10-12].

O MATEMATICKÝCH ÚLOHÁCH BEZ SLOV

MÁRIA DOMÁNYOVÁ

ABSTRAKT. *Príspevok pojednáva o matematických „úlohách bez slov“, teda takých, ktoré sú zadané bez slovného popisu či kontextu, iba pomocou obrázka, resp. obrázkovej schémy. Autorka v príspevku čerpá predovšetkým zo svojej bohatej pedagogickej praxe, v ktorej podobné úlohy využívala najmä na zvýšenie motivácie študentov. Predložený pokus o klasifikáciu týchto úloh je bohato ilustrovaný konkrétnymi príkladmi a môže tak predstavovať zaujímavú inšpiráciu pre všetkých, ktorým otázky motivácie študentov v predmete matematika nie sú cudzie..*

Kedy zadania matematických úloh dopĺňame obrázkami

Otázku „obrázkových úloh“, či „úloh bez slov“ sa pokúsime zasadiť do širšieho kontextu; všimneme si vo všeobecnosti význam obrázkov pri zadávaní matematických úloh. Ukazuje sa, že dôvody dopĺňania textu úloh obrázkami sú najčastejšie tieto:

- Zvýšenie názornosti a zrozumiteľnosti (v závislosti od predchádzajúcej skúsenosti žiakov, resp. od ich riešiteľskej úrovne) – ako ukážka môže poslúžiť príklad 5 na strane 20 v PZ3 (viď zoznam použitej literatúry)
- Ozrejmenie textu úlohy, resp. niektorých v ňom použitých pojmov – ako ukážku uveďme príklad 6 na strane 20 v PZ3 (ozrejmenie pojmu „stúpanie cesty“)
- Poskytnutie náznaku riešenia riešiteľovi – opäť ukážka z PZ3, strana 40, príklad 1 (dané údaje sú na obrázku vyznačené plnou hrubšou čiarou, tenkou čiarkovanou čiarou je vyznačený údaj, ktorý odporúčame vypočítať ako prvý)
- Zostručnenie textu úlohy (text sa priamo odvoláva na obrázok, ktorý nahrádza zložitejší slovný popis jednoduchším obrázkom) – ukážka je z úloh MO, 56. ročník, Z6-I-2

Kedy zadania matematických úloh nahrádzame obrázkami

Najčastejšie dôvody na zaradenie „úloh bez slov“ vo výuke matematiky sú tieto:

- Zvýšenie záujmu riešiteľov o danú problematiku
- Zvýšenie intelektuálnej náročnosti zadania
- Ušetrenie času či priestoru

Motivačný účinok úloh bez slov môže byť až prekvapivo vysoký; úlohy zaujmú najmä žiakov, ktorí radi premýšľajú, ale neradi sa učia. Treba si však uvedomiť, že sú typy žiakov, ktorí sa cítia byť podobným typom úloh neprimerane zaskočení, až „ohrození“, u týchto treba voliť iné motivačné prostriedky. Ďalším úskalím je skutočnosť, že príliš častým zadávaním obrázkových úloh sa ich motivačný účinok oslabuje. (Inými slovami, je vhodné s nimi narábať tak, ako s koreninami v gastronómii.)

Opatrnosť je namieste aj pri „obrázkových dôkazoch“, ktoré sú síce nádhernou ilustráciou krásy matematiky a vzájomnej korešpondencie jej jednotlivých odvetví, a môžu tiež inšpirovať k správnemu postupu pri dôkaze, avšak korektný matematický dôkaz nenahrádzajú.

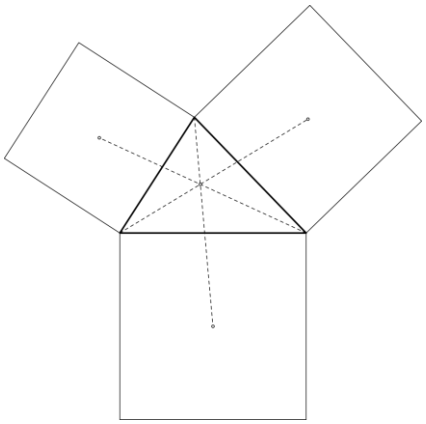
Napokon, veľmi dôležitým aspektom je jednoznačnosť obrázkových zadaní – tu sa obvykle predpokladá istá dohoda medzi zadávateľom a riešiteľom (aby bolo jasné, čo

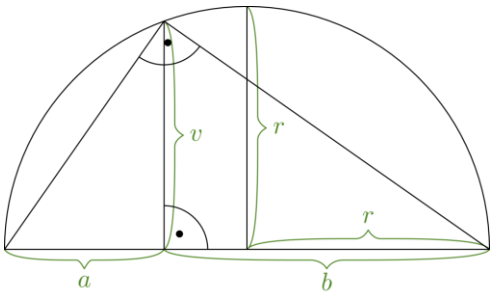
znamenajú napríklad jednotlivé písmená na obrázku – môžu to byť body, ale eventuálne aj obsahy plôch a pod.)

Výhodu obrázkových zadaní na šetrenie času, resp. miesta v publikáciách využívajú aj súčasní vynikajúci geometri, napr. Rus Arseniy Akopyan [2].

Klasifikácia úloh bez slov z hľadiska účelu

- stručnosť zadaní – šetrenie času, priestoru
- motivácia, vzbudenie záujmu
- poukázanie na korešpondenciu medzi časťami matematiky
- intelektuálna výzva, „chyták“





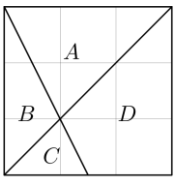
$v = \sqrt{a \cdot b}$ $\quad r = \frac{a+b}{2}$

$v \leq r$ $\quad \sqrt{a \cdot b} \leq \frac{a+b}{2}$

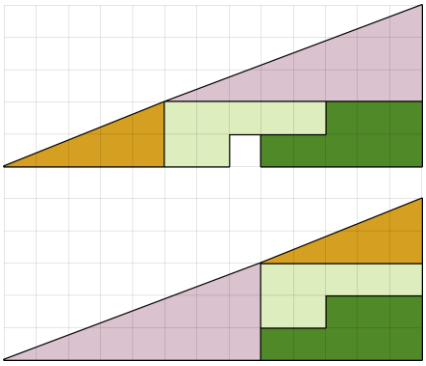
Klasifikácia úloh bez slov z hľadiska obsahu

- súvisia so všeobecnými atribútmi kvality myslenia
- súvisia s preberanou matematickou problematikou

25	17	13
38	30	26
31	?	19

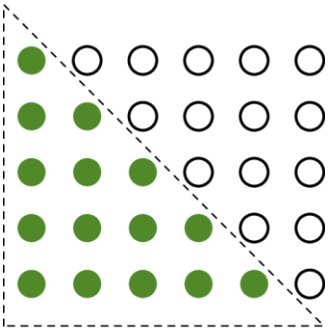


$A : B : C : D = ?$

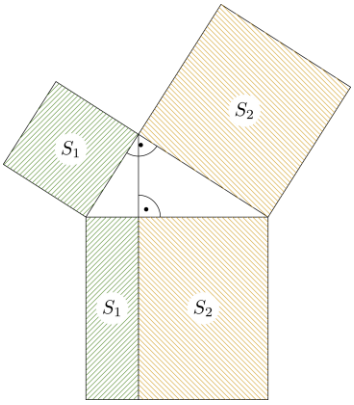


Klasifikácia úloh bez slov z hľadiska charakteru

- skúmavé (zamerané na hľadanie zákonitostí)
- „dôkazové“ (zamerané na geometrické ilustrácie dôkazov)
- výpočtové (určenie hodnoty veličiny vyznačenej na obrázku)



$$1+2+3+4+5=\frac{5\cdot 6}{2}$$
$$1+2+3+\ldots+n=\,?$$



Literatúra

[1] Mária Dományová: *Matematika 3, pracovný zošit pre gymnáziá a stredné školy (PZ3),* mesto-Bratislava, LiberaTerra 2018, ISBN 978-80-89792-56-6

[2] Arseniy Akopyan: *Geometry in Figures* (second edition), IST AUSTRIA 2017

[3] archív autorky a internetové zdroje (domanyova.azurewebsites.net, www.skmo.sk)

RNDr. Mária Dományová
dôchodkyňa (predtým Gymnázium Pavla Horova Michalovce)
Nad Laborcom 46
SK – 071 01 Michalovce
e-mail: domanyova@gmail.com

AKO FUNGUJE DOUČOVANIE CEZ SKYPE

MARTIN DOVIČÁK, ADAM SLOVÁK

ABSTRAKT. *Informačná revolúcia prináša veľa efektívnych prostriedkov, ktoré nám vedia ušetriť čas v domácnosti, škole i bežnom živote. Aplikácia Skype, ktorá spája ľudí v reálnom čase, ponúka nástroje, ktorými sa dá doučovať ľubovoľný predmet. Na doučovanie matematiky sú potrebné, ale aj iné nástroje (aplikácie), ktoré sú obsahom tohto príspevku. Je to už tretí rok, čo prvý z autorov doučuje tretí rok matematiku cez skype a preto predkladá aj názory študentov i učiteľov.*

Ako to začalo

Asi nenájdeme učiteľa matematiky, ktorý by ešte nedoučoval žiakov, mimo svojho vyučovania. Matematika je tak krásna veda, ktorá sa nedá celej triede vysvetliť tak, aby jej pochopil každý. A preto sa nájdu v triede žiaci, ktorí potrebujú niekedy ozrejmiť, zopakovať alebo len prepočítať niektoré úlohy. Počas osobného doučovania sme používali aj digitálne pomôcky, napr. tablet, notebook alebo smartphone. V týchto zariadeniach sú aktuálne dostupné už mnohé aplikácie, ktoré môžu prispieť k efektívnemu doučovaniu. Napr. Apps in Math, GeoGebra, matika.in alebo Google. No a keď zistíte, že vy alebo žiak stráca veľa času cestovaním (niekedy aj 2 hodiny), tak môžete vyskúšať dané aplikácie používať spoločne cez Skype a ešte omnoho viac.

Čo je to Skype

Skype je aplikácia, ktorú vlastní Microsoft a jej autormi sú Niklas Zennstom a Janus Friis. Umožňuje komunikáciu prostredníctvom internetu v reálnom čase medzi dvoma alebo viacerými ľuďmi. Nutnou podmienkou používania aplikácie je internet. K pohodlnému doučovaniu cez Skype používame notebooky, ktoré odporúčame používať tak ako učiteľovi i žiakovi. V krajnom prípade môže byť alternatívou tablet.

Obrázok 1: aplikácia Skype

Ako sa pripojiť a zdieľať obrazovku

Na pohodlné doučovanie cez Skype odporúčame nasledujúce kroky[1]:

1. Stiahnuť Skype[6]
2. Registrácia – využívať plnohodnotne aplikáciu môže len registrovaný užívateľ. Registrácia je bezplatná.

[6]Stiahnuť aplikáciu odporúčame na oficiálnej stránke: www.skype.com, Stiahnutie aplikácie je bezplatné.

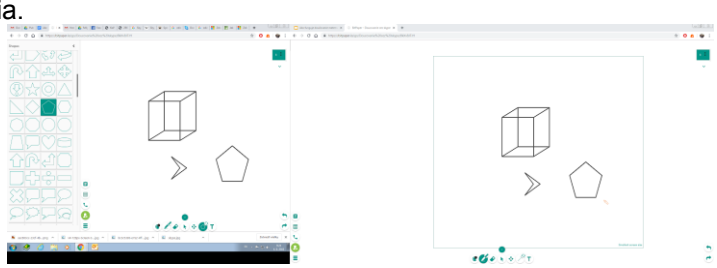
3. Pridať kontakt – po úspešnej registrácií si musíte pridať vášho žiaka, či učiteľa medzi svoj kontakt
4. Hlasový hovor alebo videohovor[7]
5. Zdielať obrazovku – obrázok 2 [2]

Obrázok 2: Tlačítko na zdieľanie obrazovky

Zdieľanie obrazovky je naším základným prvkom pri doučovaní cez Skype. Zariadenia Windows a Apple majú v ponuke zdieľanie obrazovky vo svojich svojich funkciách až po začatí hovoru. Používateľ ho nájde intutívne v ponúkaných možnostiach po začatí hovoru ako napr. obrázok 2.

Nástroje, ktoré odporúčame pri doučovaní cez Skype

1. Bitpaper.io – (obrázok 3) nástroj, do ktorého môže žiak i učiteľ zapisovať svoje výpočty a vidia obaja svoje úpravy. Výhodou tohto nástroja sú predlohy na geometrické útvary, telesá a iné výhodné tvary, ktoré nemusíte kresliť ručne. V prípade ak má Váš i žiakov notebook k dispozícií dotykové pero s grafickým tabletom, tak táto situácia je podobná resp. rovnaká ako keby ste pri sebe sedeli a spoločne písali do jedného papiera. Tento celý súbor môžete zdieľať aj s rodičom, ktorý si môže pozrieť, čo práve robíte na doučovaní, bez toho aby Vám do doučovania vstupoval.[3]
2. Google dokumenty – nástroj, kde zadávame žiakom domáce úlohy. Evidujeme si tam odučené hodiny a dané súbory môžeme zdieľať s rodičom, ktorý môže sledovať dáta z doučovania.



Obrázok 3: Bitpaper.io

Aplikácie (alebo internetové stránky), ktoré používame

A. Matika.in – Hejného prostredia v digitálne podobe[8],
B. Zborovňa.sk – Využívame na domáce úlohy,
C. Zlomky hravo – www.zlomky-hrave.cz – softvér, ktorý sa nám osvedčil pri zlomkoch,
D. Geogebra – nepoznáme lepšie prostredie na výučbu geometrie,
E. Google – každý termín, ktorý nevie žiak, čo znamená tak googlime a diskutujeme,

[7] My používáme hlasové hovory, kdeže nemáme potrebu vidieť žiaka.

[8] Aktuálne je daný web použiteľný len pre základné školy. (9/2019)

F. Apps in Math – matematické hry, ktoré žiaci hrajú úplne intuitívne aj mimo doučovania.

Používanie týchto aplikácií nám uľahčuje komunikáciu so žiakom. Samozrejme každý učiteľ po čase zistí, ktorá aplikácia je vhodná pre jeho žiaka.

Spätná väzba od žiakov a učiteľov

Počas letných prázdnin v roku 2019 sme zadali 3 žiakom, ktorých doučoval hlavný autor článku (Martin Dovičák) a 2 učiteľom krátky dotazník o osobnom i skypovom doučovaní. Žiaden z respondentov nepoužíva doučovanie cez Skype viac ako tri roky. Zhrnutie výsledkom dotazníka:

- Každý respondent by si vybral Skype formu doučovania od nového šk. roku
- Osobný kontakt - najväčšia výhoda pri osobnom doučovaní (uvideli 3 z 5)
- Úspora času – najväčšia výhoda pri Skype doučovaní (uviedli 5 z 5)
- Strata času – najväčšia nevýhoda osobnom doučovaní (uviedli 5 z 5)
- Internetové pripojenie – najväčšia nevýhoda pri Skype doučovaní (uviedli 2/5)
- Aplikácie, ktoré využívajú respondenti:
  - GeoGebra,
  - Matika.in,
  - zborovna.sk
  - http://um.mendelu.cz/maw-html/index.php?lang=cs&form=graf

Záver

Digitálny svet je tak rýchly, že už dnes sa dá vyučovať pomocou spomínaných aplikácií priamo na vyučovaní, prednáškach, či cvičeniach. V doučovaní cez Skype, ale pozorujeme, že je väčší priestor na slovnú komunikáciu, otázky, čo zrejme vychádza z toho, že spolu telefonujeme a človek je zvyknutý vtedy rozprávať. Zároveň pozorujeme väčšiu koncentráciu pri doučovaní u žiaka i učiteľa. Preto si myslíme, že doučovanie cez skype by nemalo byť vedené smerom k úspešnému zvládnutiu testu na matematiku. Skype nám dáva priestor na diskusiu, argumenty a hľadanie riešení na dané úlohy, či problémy, ktoré vzniknú. A toto je cesta, ktorou sa snažíme viesť naše doučovania cez skype -> počúvať, pýtať sa, odhadovať, overovať, počítať a argumentovať.

Internetové zdroje

[1] Ako doučovať matematiku online cez skype - https://www.youtube.com/watch?v=oYUab3sjLJM (9/2019)

[2] Skype – akozdielaťobrazovkucezskype https://www.youtube.com/watch?v=y1fhp6ipU88 (9/2019)

[3] Katietutormath - https://katietutorsmath.com/the-top-5-tools-for-the-online-math-tutor/?utm_campaign=2017-02-01&utm_medium=post&utm_source=quora (8/2019)

Mgr. Martin Dovičák, PhD. a Adam Slovák
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky Univerzita Komenského
Mlynská Dolina F1, 842 48 Bratislava
e-mail: martin.dovicak@gmail.com

ZROD A VÝVOJ ŠTATISTIKY.

JEJ NÁDHERA I TEMNÉ ZÁKUTIA.

ĽUBOMÍR DRUŽBACKÝ

ABSTRAKT. *Prednáška pojednáva o historickom vývoji štatistiky až po súčasnosť. Predstavujem v nej práce Adopha Quételeta, Francisa Galtona, Henriho Poincarého a Alexa Bellosa, doplnené o niektoré moje postrehy z učiteľského prostredia.*

16. a 17. storočie

V 16. a 17. storočí prepadla Európa vášni pre zbieranie údajov. Boli vynájdené nové meracie prístroje ako napr. teplomer, barometer a ďalšie. Vo vedeckých kruhoch sa začali používať arabské číslice namiesto rímskych. Ďalšiemu rozvoju matematiky výrazne pomohol rozvoj teórie pravdepodobnosti a ľudia začali popisovať javy okolo seba nielen kvalitatívne, ale aj kvantitatívne.

Adolphe Quételet (1796-1874), belgický matematik, astronóm, sociológ

Na začiatku svojej kariéry sa zaoberal francúzskymi štatistikami kriminality, v ktorých objavil isté pravidelnosti. Totiž, že počet vrážd v jednotlivých rokoch je porovnateľný. Dovtedy sa štatistika týkala všeobecných skutočností týkajúcich sa štátu. Quételet tento pojem rozšíril a začal sa týkať skôr matematiky kolektívneho správania. V roku 1853 usporiadal v Bruseli prvú medzinárodnú vedeckú konferenciu týkajúcu sa štatistiky.

Z jeho pozorovaní vychádzali James Clark Maxwell a Ludwig Boltzmann keď spracovávali kinetickú teóriu plynov. Aj keď nevedeli určiť rýchlosť a smer konkrétnej molekuly plynu, všimli si, že správanie sa molekúl ako celku je pre nás predvídateľné.

Keďže v Quételetových časoch neexistovali štatistické súbory, ktoré by bolo možné skúmať, Quételet vynaložil obrovské úsilie nato, aby predsa len nejaké našiel. V starom časopise *Edinburg Medical Journal* našiel záznamy meraní 5 738 škótskych vojakov. Z týchto urobil graf, ktorý mal tvar Gaussovej krivky. Z týchto Quételetových pozorovaní dodnes vychádza textilný priemysel. Niektoré značky sa špecializujú na priemerné telesné miery ľudí s úmyslom, dosiahnuť čo najväčší zisk. Ak by sme však chceli ponúknuť oblečenie väčšiemu spektru ľudí, Quételetové výskumy nás vedú k tomu, že nemusíme mať na sklade rovnaký počet kusov zo všetkých veľkostí.

Francis Galton (1822 – 1911), anglický matematik, sociológ, antropológ, vynálezca, psychológ, geograf, prieskumník, meteorológ, genetik.

Galton fascinovalo zbiernie údajov ešte viac ako Quételeta. V Londýne založil antropometrické laboratórium, kde návštevníkom meral výšku, hmotnosť, silu stisku, intenzitu výdychu, ostrosť zrakového vnímania a ďalšie fyzické vlastnosti. Laboratórium zhromažďovalo údaje od viac ako 10 000 ľudí a Galton získal vďaka nemu veľkú slávu. Galtona však viac ako fyzické vlastnosti zaujímala inteligencia. Avšak v tej dobe neexistovali IQ testy. Galton ich našiel v prijímacích skúškach na Vojenskú akadémiu v Sandhurstu. Zistil, že všetky údaje, ktoré zbieral odpovedajú normálnemu rozdeleniu, teda ich grafom je Gaussova krivka. Toto zistenie ho naplňovalo úctou: „Nepoznám nič, čo by dokázalo, tak

zapôsobiť na predstavivosť ako tento nádherný poriadok vesmíru, ktorý vyjadruje Gaussova krivka. Keby tento zákon poznali Gréci, určite by ho personifikovali alebo zbožštili. Vládne s kľudom a v absolútnom vyrovnaní uprostred najdivokejšieho zmätku. Je to najvyšší zákon nerozumu."

Galton dokonca zhmotnil túto matematiku v pomôcke, ktorá má dnes názov Galtonova doska. Je zaujímavé, ako Galton prišiel na takýto vynález. Ako ho takáto pomôcka mohla napadnúť? Inšpirovala ho stena kocky, na ktorej bolo päť bodiek. Geniálne. Takto sa okolo nás nachádza množstvo inšpirácií, ale len géniovia ich vidia.

Henri Poincaré (1854 – 1912), francúzsky matematik, fyzik, astronóm, filozof.

Henri Poincaré upodozrieval blízku pekáreň, že mu predáva príliš ľahké bochníky chleba. Preto sa rozhodol povolať matematiku do služieb spravodlivosti. Predpokladal, že graf hmotností bochníkov bude pripomínať normálne rozdelenie, teda Gaussovú krivku. Pretože chyby pri pečení chleba sú náhodné: množstvo použitej múky, vody, …

Po roku merania si svoje údaje pozrel, urobil z nich graf a rozdelenie naozaj pripomínalo normálne rozdelenie, avšak vrcholilo v hodnote 950 g a nie 1000 g ako to tvrdila pekáreň. Potvrdilo sa teda jeho podozrenie. Slávneho vedca okrádali priemerne o 50 g na jednom bochníku chleba.

Hovorí sa, že Poincaré upovedomil Parížsku políciu a tá udelila pekárovi dôrazné napomenutie.

Po tomto drobnom víťazstve v boji za práva spotrebiteľov Poincaré neustal a naďalej vážil svoj „kilogramový" bochník chleba. Po ďalšom roku zistil, že ani tentokrát nemá správne normálne rozdelenie, ale že teraz sa výsledok krúti viac doprava, teda krivka bola naklonená k väčším hodnotám. Pretože, vedel, že náhodné chyby vedú ku Gaussovej krivke, resp. zvonovej krivke, ktorá je symetrická, vyvodil, z toho, že musí dochádzať k niečo nenáhodnému, čo ovplyvňuje bochníky, ktoré kupuje. Poincaré prišiel na to, že pekár zostal stále tým starým podvodníkom, iba jemu predáva tie najväčšie, ktoré má po ruke. A takto pekár to rozdelenie vychyľoval napravo. Pekár mal smolu, že sa snažil ošudiť najchytrejšieho muža vo vtedajšom Francúzsku. Poincaré vec opäť nahlásil na políciu.

Poincarého pasca na pekára predbehla dobu, dnes tvorí základ ochrany spotrebiteľa. Jednou z úloh inšpekcie je brať náhodne vybraté kusy tovaru a robiť grafy na základe ich hmotnosti. U každého kusu tovaru, musí rozdelenie hmotností jednotlivých exemplárov tvoriť normálne rozdelenie, ktorého stred sa nachádza v deklarovanej strednej hodnote.

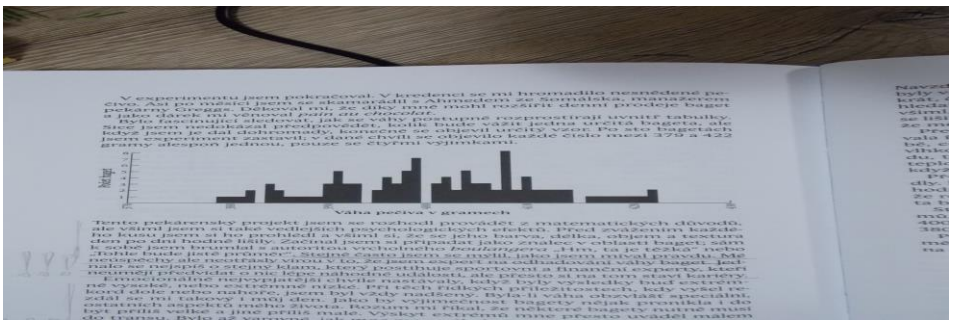
Alex Bellos (nar. 1969), súčasný anglický matematik a spisovateľ

Alex si kúpil novú kuchynskú váhu a prepadla ho túžba vážiť. Zašiel do blízkej pekárne Greggs a kúpil si bagetu. Prvý deň vážila 391 g, druhý deň 398 g, tretí deň 399 g ,štvrtý deň 403 g. Alex si uvedomoval, že hmotnosť nemôže stále rásť a naozaj piaty deň vážila bageta iba 384 g.

Obyčajný smrteľník by ani nepovedal, aké je meranie naozaj dôležité, aký obrovský vplyv malo na vývoj ľudstva a tiež aké je zaujímavé a koľko rôznych dôsledkov zo sebou prináša. Naozaj, čím ľudia viac merali, tým boli múdrejší. Pozrieme sa teraz na to, aké vedľajšie psychologické dôsledky prinieslo Alexovo váženie bagiet. Alex hovorí, že jeho denný rituál ranného nakupovania a následného váženia bagiet bol stále radostnejší. Bolo to niečo, ako keď porovnávate výsledky svojho týmu, alebo keď kontrolujete svoje akcie na

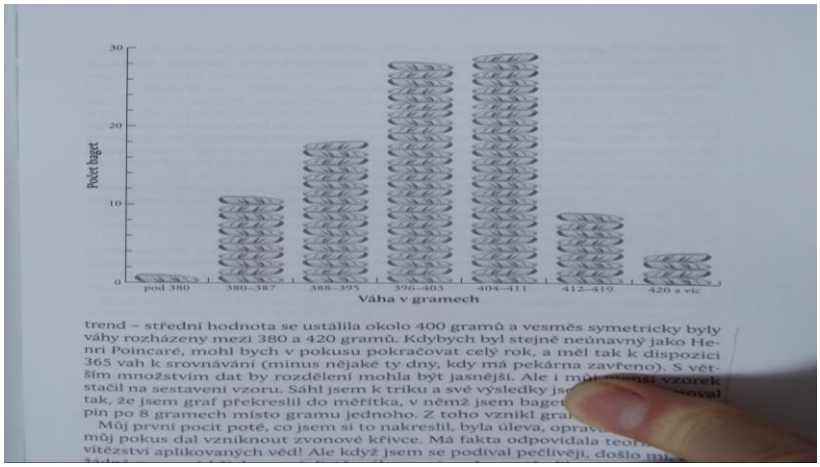
finančných trhoch. Pred zvážením každého kusa si ho najprv poriadne prehliadol a pozoroval, že farba, dĺžka, objem, textúra sa kus od kusa líšia. Po niekoľkých dňoch si už začal pripadať ako expert na bagety. Sám pre seba si mrmlal: „Hm, tá je ale ťažká.“ alebo „To bude určite priemer.“ Alex si však všimol zaujímavú vec, že rovnako často mal pri svojich odhadoch pravdu ako sa mýlil. Napriek tomu to neotriaslo jeho presvedčením, že je expert na bagety. Tento klam podľa všetkého postihuje aj športových alebo finančných expertov, ktorí nevedia odhadovať náhodné udalosti, ale napriek tomu sa považujú za expertov v danej oblasti a budujú si na tom svoje kariéry. Ako emocionálne najvypätejšie chvíle opisuje Alex dni, kedy boli bagety buď veľmi ľahké alebo veľmi ťažké. Ak bola hmotnosť špeciálna, taký sa mu zdal aj jeho deň. Rozum mu síce hovoril, že niektoré bagety musia byť ťažšie a niektoré ľahšie, napriek tomu ho výskyt extrémov privádzal až do tranzu. Alex sám o sebe hovorí: „Nepovažujem sa za človeka poverčivého, ale nemohol som si pomôcť a v náhodných štruktúrach som nachádzal určité významy.“ Je to silná pripomienka ako veľmi je každý z nás, náchylný k nepodloženým tvrdeniam, dokonca to platí aj o nás matematikoch. Je to zvláštne. Na jednej strane nás matematika učí, že každé tvrdenie musí byť dokázané. Veta, dôkaz, veta, dôkaz, … A predsa koľkokrát sme uverili podvodníkom, falošným správam na internete, či v tlači. To je obrovské nebezpečenstvo najmä pre mladých ľudí, ktorí ešte neprešli spomínaným tréningom: veta, dôkaz, veta, dôkaz,…

Predsa len si myslím, že nás matematika aspoň trochu chráni. Alex vydržal robiť svoj pokus 100 dní a potom zo zozbieraných údajov urobil graf, ktorý je na obr.1. Hmotností v prvom grafe sú na x-ovej osi rozdelené po jednom grame. Po Gaussovej krivka tam nie je ani stopy.



Obrázok 1

Preto urobil Alex komprimáciu svojich výsledkov a rozdelil hmotností na x-ovej osi po ôsmych gramoch. Pozri obr. č. 2.

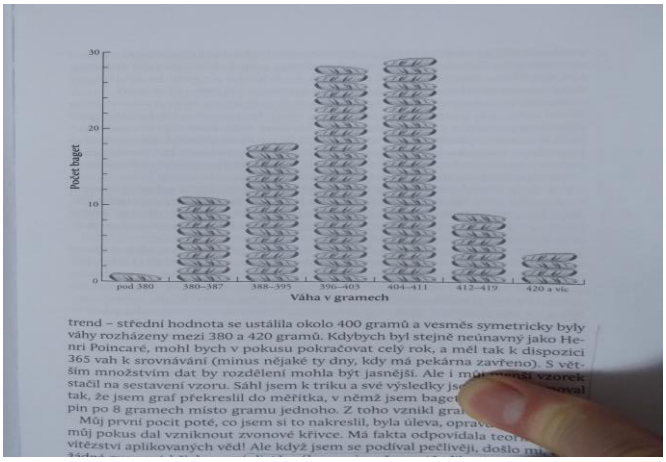


trend – střední hodnota se ustálila okolo 400 gramů a vesměs symetricky byly váhy rozházeny mezi 380 a 420 gramů. Kdybych byl stejně neúnavný jako Henri Poincaré, mohl bych v pokusu pokračovat celý rok, a měl tak k dispozici 365 vah k srovnávání (minus nějaké ty dny, kdy má pekárna zavřeno). S většími množstvím dat by rozdělení mohla být jasnější. Ale i m… vzorek stačil na sestavení vzoru. Sáhl jsem k tužce a své výsledky js… oval tak, že jsem graf překreslil do měřítka, v němž jsem baget… pin po 8 gramech místo gramu jednoho. Z toho vznikl gra…

Můj první pocit poté, co jsem si to nakreslil, byla úleva, oprav… můj pokus dal vzniknout zvonové křivce. Má fakta odpovídala teor… vítězství aplikovaných věd! Ale když jsem se podíval pečlivěji, došlo mi…

Obrázok 2

Prvý pocit, ktorý sa u Alexa dostavil po nakreslení druhého grafu bola úľava. Naozaj sa zdalo, že jeho merania odpovedajú Gaussovej krivke. Avšak keď sa pozrel lepšie zistil, že to nie je žiadna Gaussová krivka, resp. nie je symetrická. Pozri obr. č. 3.



trend – střední hodnota se ustálila okolo 400 gramů a vesměs symetricky byly váhy rozházeny mezi 380 a 420 gramů. Kdybych byl stejně neúnavný jako Henri Poincaré, mohl bych v pokusu pokračovat celý rok, a měl tak k dispozici 365 vah k srovnávání (minus nějaké ty dny, kdy má pekárna zavřeno). S většími množstvím dat by rozdělení mohla být jasnější. Ale i m… vzorek stačil na sestavení vzoru. Sáhl jsem k tužce a své výsledky js… oval tak, že jsem graf překreslil do měřítka, v němž jsem baget… pin po 8 gramech místo gramu jednoho. Z toho vznikl gra…

Můj první pocit poté, co jsem si to nakreslil, byla úleva, oprav… můj pokus dal vzniknout zvonové křivce. Má fakta odpovídala teor… vítězství aplikovaných věd! Ale když jsem se podíval pečlivěji, došlo mi…

Obrázok 3

Veľké odhalenie

Čo mohlo spôsobiť, že krivka je nesymetrická? Ponúkali sa dva možné závery: buď bagety od Greggs nie sú normálne rozdelené, alebo do výskumu zasiahol nejaký ďalší faktor.

Alex si niektoré bagety, na ktoré už nemal chuť, odkladal. Vytiahol niekoľko dní starý kus, odvážil ho a k jeho veľkému prekvapeniu zistil, že váži len 321 g, čo je oveľa nižšia hmotnosť, ako ktorákoľvek z doteraz nameraných. Tu mu došlo, že hmotnosť nie je pevne daná. Pečivo ako schne svoju hmotnosť stráca. Alex teda išiel opäť do pekárne a kúpil ďalší kus, ktorý zvážil ráno o 8:00 a napoludnie. Bageta za ten čas stratila 15 g na svojej hmotnosti. „Teraz bolo jasné, že som svoj pokus urobil zle“, priznáva Alex. „Niekedy som totiž vstal ráno o 7:00 a išiel som kúpiť bagetu, inokedy sa mi však ráno nechcelo vstávať a

tak som bagetu, kúpil neskôr.“ Prvý faktor, ktorý určite ovplyvnil Alexovo meranie bol čas váženia. Avšak Alex našiel ešte ďalší faktor: počasie. Svoj pokus začínal začiatkom marca a končil začiatkom júna. Pozrel sa do svojej tabuľky a zistil, že naozaj bagety, ktoré kupoval začiatkom júna boli o čosi ľahšie ako marcové bagety. Letné horúčavy vysúšali pečivo o čosi rýchlejšie. Aj tento faktor mohol spôsobiť vychýlenie krivky doľava. Pri svojich prednáškach som si uvedomil ešte jednu vec. Totiž človek sa najviac naučí, keď to vysvetľuje druhým. Práca pekára je štandardne práca „nočného vtáka“. Ak by sme chodili každý deň nakupovať bagety ráno o 7:00, stále by nám do našich meraní zasahoval tajný škriatok. Totiž, ráno keď prídete do obchodu, neviete, či si kupujete bagety z várky upečenej večer o 22:00 hod. alebo ráno 2:00 hod. alebo ráno o 5:00. Hmotnosť pečivá nie je presne daná. A tak jediný spôsob by bolo nakupovať teplé pečivo. Aj keby to nebolo každý deň po sebe.

Vráťme sa Henrimu Poincaré. Započítal Poincaré do svojich meraní dennú dobu váženia alebo Parížske počasie? Možno vôbec nedokázal, že mu predávajú chlieb s priemernou hmotnosťou 950 g, ale že hmotnosť kilového bochníka chleba sa scvrkne od upečenia do času zváženia o 50 g. Ale to potom mení celú vec. Čo ak teda onen spomínaný pekár bol poctivým človekom, ktorý si zodpovedne robil svoju prácu. Len mal tú smolu, že natrafil na génia, ktorý sa mýlil.

Regres k priemernej hodnote

V roku 2002 nezískal Nobelovú cenu za ekonómiu ekonóm, ale psychológ Daniel Kahneman, súčasný izraelsko-americký psychológ, ktorý sa celú svoju kariéru zaoberal poznávacím faktorom, ktoré stoja za ľudským rozhodovaním. Kahneman hovorí, že najviac zo všetkého mu otvoril oči regres k priemernej hodnote. Nie je to komplikovaná myšlienka, ide o toto: „Ak skúmame udalosti, na ktoré vplývajú nahodné faktory, potom po každom extrémnom výsledku, bude veľmi pravdepodobne nasledovať výsledok menej extrémny.“ Regres k priemernej hodnote je jeden z najviac prehliadaných a pritom jeden z najužitočnejších matematických konceptov, potrebných pre racionálne chápanie sveta. Dokonca až prekvapivo veľa omylov vo vede vychádza z toho, že sa neberie do úvahy regres k priemernej hodnote. Napr. ak dobrý žiak, povedzme žiak, ktorý píše písomky priemerne na dvojku, napíše písomku na 4. Učiteľ má tendenciu prísť s písomkami do triedy a poriadne to tomuto žiakovi „vytmaviť“. Nemusí to myslieť zlé. Možno v tom najlepšom úmysle ho chce povzbudiť k väčšiemu výkonu a lepším výsledkom, lebo vie, že ten žiak na to má. Ale žiak to môže vnímať presne naopak, že učiteľ ho pred celou triedou zhodil ako nejakého štvorkára, pričom jemu sa len táto písomka nepodarila. A naozaj, bez to, žeby učiteľ, čokoľvek povedal tomuto žiakovi, regres k priemernej hodnote nám hovorí, že tento žiak s vysokou pravdepodobnosťou napíše najbližšiu písomku lepšie. Samozrejme, môže sa stať, že sa žiak „spustí“. Ale na to skúsený učiteľ nepotrebuje žiadnu písomku a hneď vie, že sa so žiakom niečo deje, alebo, že sa deje niečo v rodine.

Tri pohľady na Gaussovú (zvonovú) krivku.

Prvý pohľad je pohľad Adolpha Quételeta, ktorý velebil priemery, dokonca vymyslel termín „človek priemerný“, o ktorého by sme sa mali snažiť. Podľa Quételeta odchýlky od priemeru vedú k ošklivostiam telesným i morálnym.

Druhý pohľad je pohľad Francisa Galtona. Zatiaľčo Quételet velebil priemery, Galton nimi pohŕdal a snažili sa vychýliť Gaussovú krivku do pozitívnych hodnôt. Na základe Drawinovej teórie, začal Galton vymýšľať teórie o tom, ako by sa dala samotná ľudská evolúcia riadiť. Zaujímal sa najmä o to, ako by sa dala zvýšiť celková ľudská inteligencia. Za

týmto účelom navrhoval zriadiť nový vedný odbor na „kultiváciu rasy“ eugenika, z gr. *eu* – dobrý, *genos* – zrod. Nová myšlienka si našla svojich nadšencov. Jedny podporovali eugenické manželstvá medzi zdravými a vysoko inteligentnými ľuďmi. Iní zasa odrádzali, či dokonca zabraňovali reprodukciu ľudí s horším genofondom. Na základe eugeniky sa diali násilné sterilizácie duševne chorých, hendikepovaných a ďalších, ktorých eugenika považovala za geneticky nespôsobilých. V tridsiatych a štyridsiatych rokoch 20. stor. sa eugenika stala synonymom vražedných politík nacistov a ich snahy o vyšľachtenie nadradenej árijskej rasy. A tak sa ľudstvo stalo svedkom toho, keď snaha o deformovanie matematického modelu, priniesla obrovské poníženie ľudskej dôstojnosti, násilie a potoky krvi. Namiesto vytvorenia raja na Zemi, sme stvorili obrovské peklo. A to trvá v rôznych podobách dodnes. Aj génius sa niekedy zmýli.

A je tu ešte tretí pohľad na Gaussovú krivku a to je môj pohľad. Gaussová krivka je niečo ako panenský sneh alebo ako jazierko s vodopádom na krásnom ostrove. Nehovorím o tom, žeby sa v ňom človek nemohol okúpať. Ale nech sa správa ekologicky. Ide o pohľad s rešpektom. Rešpektujme túto zvonovú krivku. Nesnažme sa ju deformovať.

Množstvo učiteľov sa snaží vychýliť túto krivku k pozitívnym hodnotám. Ale je to len niečo umelé, násilné. Ako sa to deje?

Dá sa žiakom ľahká písomka, aby sa navonok zdalo, koľko toho učiteľ naučil, alebo ako sú jeho žiaci úspešní. Zapojte však žiakov aj do postupových súťaží, neprezrádzajte žiakom príklady, ktoré budú na zajtrajšej písomke, dávajte im cudzie príklady. Len vtedy od nich budete vyžadovať myslenie, o ktoré na matematike ide. A navyše, výsledky, ktoré uvidíte, budú reálne. Možno nebudú zodpovedať normálnemu rozdeleniu, lebo to je veľmi vzácne. Nemôžete mať na ZŠ v šiestom ročníku normálne rozdelenie, keď na konci piateho vám odídu 4 super žiaci na osemročné gymnázia. A už vôbec nie v 9. ročníku, keď na konci ôsmeho ročníka vám ďalší dvaja výborní alebo aspoň z tých lepších odídu na bilingválne gymnázia alebo obchodné akadémie. Z prímestských vidieckych škôl dochádzajú žiaci do mesta z rôznych dôvodov. Jedni preto, že tam pracujú rodičia a vyhovuje im to, čo sa týka dopravy. Iní tam idú za lepšou školou, ďalší za súkromnou, bilingválnou, či cirkevnou školou. A tiež netreba zabudnúť na tých, ktorí sa síce narodili v tej alebo onej dedinke, či meste, ale žijú so svojimi rodičmi za hranicami Slovenska. To všetko sú faktory, ktoré ovplyvňujú normálne rozdelenie na našich školách. Normálne rozdelenie je naozaj vzácne.

Výsledky testovania síce ukazujú, že Gaussova krivka je naklonená k pozitívnym hodnotám, ale to len preto lebo to chceme. Príklady sú dopredu niekoľko rokov testované a triedené. Tie, v ktorých žiaci vykazujú slabé výsledky sú nahradené jednoduchšími a príliš ľahké sú tiež vytriedené.

Mnohé školy sa snažia dosiahnuť nadpriemerné výsledky, ale márne. Sú takí, ktorí si myslia, že zmenou osnov, zmenou prístupu, či novými učebnicami dosiahneme lepšie výsledky. Všetko sú to úctyhodné ciele. V mnohých prípadoch aj opodstatnené a dobré, pretože existujú ďalšie faktory, ktoré sa snažia nakloniť krivku k slabým hodnotám. Ale treba si uvedomiť, že Gaussovú krivku výsledkov slovenských žiakov najviac ovplyvňuje politická, ekonomická a hospodárska nerovnováha, nielen v Európe.

Niektoré snahy učiteľov o dosahovanie dobrých, či dokonca výborných výsledkov, v rámci porovnania tried na škole, či v rámci porovnania škôl v okrese, spôsobujú niektorým žiakom doslova peklo, a to nielen na škole, ale zo života vôbec. Rešpektovanie jednotlivých daností a talentov žiaka je na Slovensku stále vzácna. A pritom, každý žiak sa v niektorej oblasti nachádza v rámci Gaussovej krivky na jej pozitívnej strane. Napr. u niekoho to môže byť matematika, u iného hra na klavír, u ďalšieho atletika, ešte u iného niektorí z kolektívnych športov, alebo výtvarný prejav. Tento talent treba v žiakovi nájsť a rozvíjať. Týmto smerom

treba žiaka nasmerovať. Samozrejme niektorí žiaci sú leniví a tým si strašne škodia. Neučia sa, trávia čas zbytočnosťami. Je to preto, že im chýba tá správna motivácia. Ale treba si uvedomiť aj to, že tak ako existujú žiaci, ktorí sa nikdy nenaučia hrať na husle, ktorí sa nikdy nenaučia cviky na hrazde, či na kruhoch, tak existujú aj žiaci, ktorí nebudú vykazovať dobré známky z matematiky. Tu neide o vieru v akýsi matematický talent. Že niektorí veria, že existuje talent na matematiku a iní neveria, že existuje talent na matematiku. To je presne jedna z tých zlých myšlienok, niečo ako vírus. V skutočnosti to, čo niektorí popisujú ako talent na matematiku, je spôsob ako je u dieťaťa vyvinutý mozog. Ten mozog samozrejme je možné rozvíjať. Ale dieťa, ktoré je skutočným trojkárom v matematike, (to znamená, že sa nefláka, má vhodné prostredie na učenie, atď.), musí sa učiť, počítať príklady, a vynaložiť obrovské úsilie na to, aby zostal trojkárom. A toto úsilie je častokrát väčšie ako úsilie, ktoré vynaloží jednotkár nato, aby zostal jednotkárom. Tento jav napr. nevedia pochopiť rodičia, ktorí vybavia svojmu dieťaťu doučovanie z matematiky. Drvivá väčšina si myslí, že keď si platia doučovateľa, tak dieťa bude mať skoro automaticky o stupeň lepšiu známku na vysvedčení, možno aj o dva stupne. A pritom nevidia, že doučovateľ naozaj svoju prácu odviedol dobre a žiakovi sa podarilo zvládnuť, pre neho, náročné učivo a udržať sa na trojke.

Záverom

Na záver by som chcel zdôrazniť jednu dôležitú vec: neexistuje iba jedna Gaussová krivka. Existujú ich tisíce, ba milióny. Gaussová krivka výšky, Gaussová krivka hmotnosti, Gaussová krvika výsledkov IQ testov, Gausová krivka hry na husle, Gaussová krivka hry na klavír, Gaussové krivky rôznych športových disciplín, tanca, ochoty pracovať manuálne, a množstvo ďalších. Existuje veľa kriviek, v ktorých vykazujeme podpriemerné výsledky. Množstvo vecí nevieme robiť a nikdy ani nebudeme vedieť. Potom je veľké množstvo Gaussových kriviek, v ktorých vykazujeme priemerné výsledky. A existuje aj niekoľko kriviek, v ktorých sme fakt dobrí, dokonca nadpriemerní. Preto by sme ako učitelia tieto krivky mali u našich žiakov vyhľadávať a na vyučovaní o nich hovoriť. Myslím, že by to prispelo k väčšej vzájomnej úcte voči žiakmi a k príjemnej atmosfére bez šikanovania. Ak by sme urobili štatistiku toho, čo som práve opísal, možno by sme dostali Gaussovú krivku Gaussových kriviek.

Tak používajte rozum a rozmýšľajte kriticky.

Literatúra

[1] Bellos, A.: *Alexova dobrodružství v zemi čísel. Výprava do úžasného sveta matematiky.*, Praha, Dokořán, 2015, ISBN 978-80-7363-534-3

[2] Henderson, M: *Genetika, 50 myšlienok, ktoré by ste mali poznať*, Bratislava, SLOVART, 2016, ISBN 978-80-556-1155-6

Mgr. Ľubomír Družbacký,
GOOD IDEA
Zelenečská ulica č. 103
SK – 917 02Trnava
e-mail: lubo.dr@gmail.com

ÚLOHA "NEZMYSLOV" VO VZDELÁVANÍ

JOZEF HVORECKÝ

Abstrakt. *Niektoré zadania (alebo ich riešenia) znejú absurdne, až nezmyselne. To však neznamená, že sa nesmú počas vyučovania objaviť. Skôr naopak - ich prekvapivý účinok pomôže spestriť priebeh výučby a poukáže na zložitejšie súvislosti danej látky a/alebo upozorní študentov na opatrnosť pri hľadaní riešenia. V rámci prednášky uvedieme viacero úloh využívajúcich zdanlivé absurdity na zvýšenie záujmu žiakov a študentov o matematiku. Zámerom je odstrániť nedorozumenia typu "matematika nesúvisí s reálnym životom", lebo "je iba o číslach". Napaldo vás viužyť poodbné tvrednie na sjevoj hidone? Zadania uvedené v článku a ich varianty sa dajú využiť na spestrenie výučby.*

Úvod

Kto si všimol nápadne vysoký počet gramatických chýb v predposlednej vete abstraktu, vytuší zámer článku. Chceme ukázať, že drobné chyby nemôžu byť prekážkou pri správnom pochopení celku. Strach pred nedokonalosťou argumentácie vedie učiteľov k preplneniu látky formálnymi detailmi, ktoré však môžu – vinou veľkého počtu – zastrieť primárny obsah posolstva. Grainger and Whithey v článku [1] ukázali, že zámena vnútorných písmen v slovách nebráni ich správnemu čítaniu a interpretácii. Aj názov ich článku *Does the huamn mnid raed wrods as a wlohe?* (kontextovo preložené: Vmína ľusdká myesľ slvoá ako ceolk?) naznačuje, že drobné chyby v komunikácii nemusia zabrániť pochopeniu obsahu správy, pretože jej posolstvo vnímame v kontexte. Extrapolovaním ich poznatkov môžeme vysloviť domnienku, že aj neúplná informácia viesť k pochopeniu celku.

V článku [2] sme ukázali, že o značnej miery platí aj opak: Z nezmyselnosti výsledku vieme odvodiť aj absurdnosť pôvodného zadania. Svoje tvrdenia sme v [2] demonštrovali sériou úloh, naznačujúcich, že samotná matematika nerešpektuje iný kontext než vlastné axiómy, pravidlá a postupy spracovania. Keď však chceme matematiku použiť na riešenie reálneho problému, musíme nielen poznať jej explicitné pravidlá, ale aj brať do úvahy, či sú v danom kontexte aplikovateľné. Matematické pravidlá a postupy predstavujú explicitné poznatky a sú objektívne z hľadiska celého ľudstva. Vhodnosť ich použitia v danom kontexte je špecifická a individuálna. Daný jedinec si ju musí osvojiť ako svoj tacitný (podvedomý) na svojej ceste k dosiahnutiu excelentnosti. Výsledkom [2] bolo konštatovanie: „*Každé úspešné vyriešenie problému je príbehom vhodnej kombinácie tacitných a explicitných poznatkov – so štipkou šťastia navrch. Ak žiaci nezískajú tacitné vedomosti, memorovanie explicitných je zbytočné*.“

V tomto článku rozvinieme predchádzajúcu myšlienku. Ukážeme, ako rozvíjať tacitné vedomosti cieľavedomými „nezmyslami“, ktoré však zároveň obsahujú náznak riešenia alebo cestu k nemu, prípadne slúžia ako základ pre formulovanie nadväzujúcich problémov. Nejde teda nezmysly vo význame „hlúposť, nerozum“. V uvedených úlohách ide skôr o záhady s osobitnou vnútornou logikou. Ich riešením chceme rozvíjať tvorivosť a využívať vedomé aj nevedomé poznatky žiakov o okolitom svete. Ich interdisciplinárny charakter umožňuje uplatniť kreativitu učiacich sa nielen počas riešenia matematických úloh, ale aj v ďalších vyučovacích predmetoch. Úlohy uvedené v článku sa preto dajú využiť aj pri výučbe materinského jazyka a informatiky.

Úlohy s permutovaným textom

Názov článku Graingera a Whitneyovej je zrozumiteľný pre pokročilého znalca angličtiny, kým pre menej zdatných bude bezobsažným v obidvoch verziách – v použitej aj v gramaticky správnej. Túto vlastnosť má napríklad slovenský text: Pteer a Odrnej sú dvjičoky. Ľduia si ich čtaso mýila. Chplcai to očabs znežíuavjú, havlne v škloe.

Využitie vo výučbe materinského jazyka

Pri výučbe slovenčiny sa dá takto ukázať, že gramatické chyby nemusia byť faktorom, ktorý zničí zrozumiteľnosť. Na dosiahnutie dohodnutého, štandardizovaného tvaru vyjadreného sústavou presne definovaných pravidiel [3] je treba sa naučiť odstraňovať chyby z nesprávne zapísaného textu podobného uvedenému.

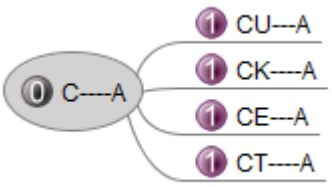
Žiaci často namietajú, že presná gramatika nie je dôležitá: „*Veď sa tomu dá aj tak rozumieť.*“ Ako ukazujeme v ďalšej časti, matematika môže poslúžiť ako protiargument. Keby totiž začal každý používať vlastnú formu zápisu, nerešpektujúcu spôsob zápisu ostatných používateľov, mohlo by to skončiť absolútnym chaosom. Čítanie modifikovaného textu je totiž možné vďaka tomu, že myseľ transformuje chybne zapísaný text na štandardizovaný. Žiaci musia pochopiť, že neexistencia štandardu je vážnou prekážkou porozumenia. Štandard je teda nevyhnutný a každý by ho mal poznať.

Využitie vo výučbe matematiky

Grainger and Whithey [1] uvažovali úpravy slov, pri ktorých sa zamieňajú vnútorné písmená. Prvé a posledné písmeno zostávajú na svojom mieste. Prvou „matematickou“ otázkou je teda: Aký má vplyv toto zistenie na trojpísmenové slová? Pochopiteľne, musia ostať bezo zmeny, lebo ich nie je s čím zamieňať. Tento poznatok sa môže zdať nepodstatný, má však svoj dôvod. Skúsený učiteľ totiž už teraz vie, že všetkých počet „zrozumiteľných“ zámen je faktoriál počtu vnútorných písmen. Takže predchádzajúca otázka bola vlastne článkom propedeutiky faktoriálu, presnejšie zavedenie čiastkového poznatku „1! = 1“.

Samozrejme, ak je N počet vnútorných písmen N, počet permutácií bude N! iba vtedy, keď sú všetky rôzne. Na začiatku treba preto voliť krátke slová, v ktorých to platí. Kreslením vetvení na základe zostávajúcich (zatiaľ nevložených) písmen žiaci ľahko zistia, že počet vetvení sa na každej úrovní mení.

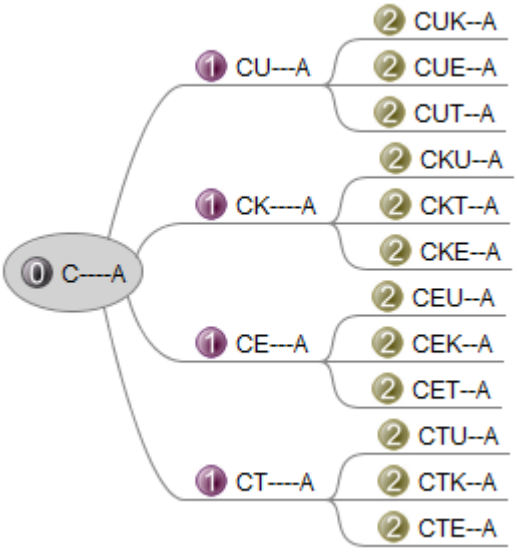
Ako príklad uvádzame alternatívy slova CUKETA. Začíname „slovom“ C----A. Prvé a posledné písmeno sú na svojom mieste, medzi nimi sú štyri medzery pre vnútorné písmená. Na obr. č. 1 vidieť štyri vetvy, zodpovedajúce štyrom možnostiam vloženia písmen U, K, E a T[9].



Obrázok 1: Štyri prvé vloženia

[9] Číslo pred slovom špecifikuje počet vložených vnútorných písmen.

Dané štyri možnosti sa dajú opäť vetviť, tentoraz iba trikrát. Písmeno vložené na prvé miesto sa totiž už nesmie viac použiť. Výsledok je na obr. č. 2.



Obrázok 2: Vetvenie po vložení písmen namiesto prvých dvoch medzier

Ešte stále existuje možnosť voľby, pretože vždy existujú dve voľné vnútorné písmená. Obr. č. 3 ukazuje stav po ďalšom vetvení.

V tejto chvíli je už úloha takmer na konci, jej riešenie však možno podporiť niekoľkými otázkami:

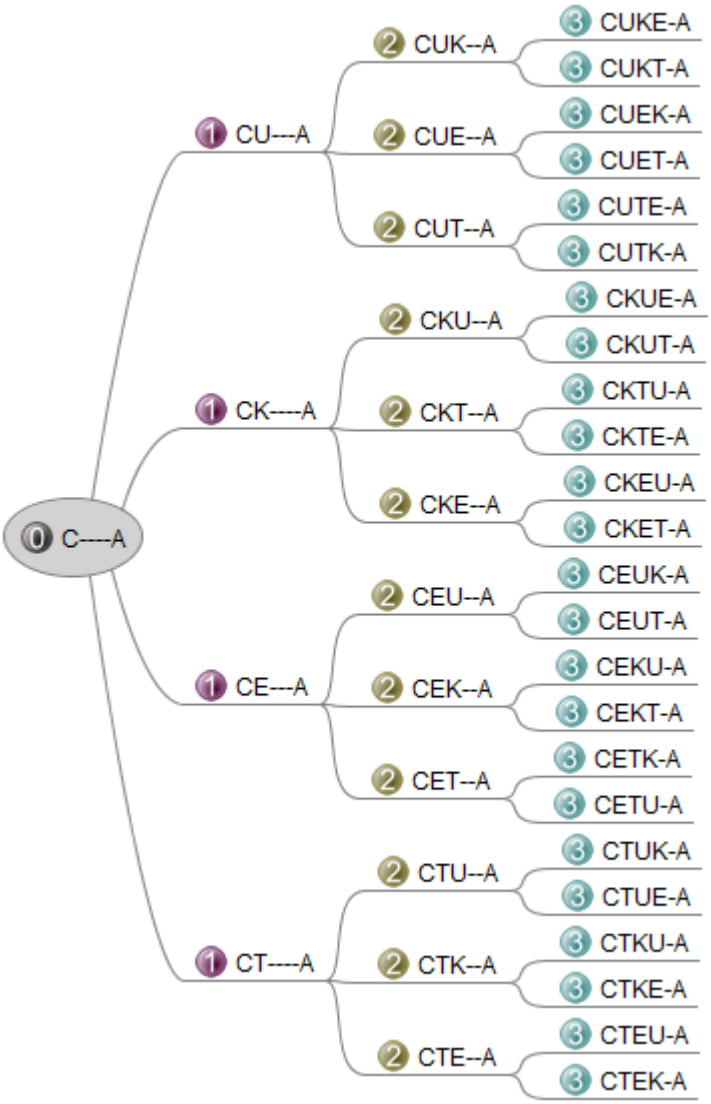
A) Vetvení je dvadsaťštyri. Zväčší sa ich počet v nasledujúcom kroku?
B) Ktoré iné slovo sa vetví rovnakým spôsobom?
C) Ovplyvní opakovanie vnútorného písmena (napr. v slove perleť) počet „zrozumiteľných podôb“ slova? Ako?
D) Ovplyvní zhoda niektorého vnútorného a vonkajšieho písmena (napr. v slove mramor) počet permutácií?

Od žiakov treba zároveň žiadať vysvetlenie ich názoru – prečo ich tvrdenie platí, resp. prečo neplatí tvrdenie opačné. Učiteľ môže sa napríklad pýtať, či je isté, že týmto spôsobom vygenerujeme všetky možné permutácie vnútorných písmen – a ako to dokázať.

Výhodou úloh je možnosť využiť bežné poznatky žiakov. Napríklad počet vetvení v slove cuketa sa postupne redukuje zo štyroch na tri, potom na dve až po jedno. Posledná možnosť môže byť pritom predmetom diskusie, či aj „jedno vetvenie je vetvenie“. Pomôcť môže obr. č. 3. Aby bola slová úplné, musíme spraviť ešte jeden krok k slovám úrovne 4, lebo iba ony obsahujú všetky vnútorné písmená. Tento prístup ozrejmí, prečo

$$N! = N \times (N-1) \times \ldots \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

Pomocou úloh, v ktorých permutujeme opakujúce sa vnútorné písmená, dokážu žiaci usúdiť, že každé opakovanie zmenší pôvodný výsledok K! – krát, kde K je počet jeho opakovaní. Hoci nejde o nijako prekvapujúci a ani z hľadiska matematiky významný poznatok, jeho úloha pri budovaní sebadôvery učiacich sa je neoceniteľná.



Obrázok 3: Vetvenie po vložení troch písmen

Využitie vo výučbe informatiky

Ochrana osobných údajov patrí k najdiskutovanejším témam súčasnosti. Slová s permutovanými písmenami umožňujú skomplikovať dešifrovanie správy, ktorá ich obsahuje. Pri odhaľovaní kódu sa totiž veľmi často využívajú frekvenčné charakteristiky, typické pre daný jazyk (typické často sa vyskytujúce zhluky písmen). V slovenčine sú takými napríklad dvojice ka-, po-, vy- a pod.) Vhodnou zámenou písmen v slovách, ktoré ich obsahujú, dokážeme ich frekvenciu znížiť. Text ich bude obsahovať výrazne menej ako je pre slovenčinu typické. Táto úloha sa dá využiť ako praktické cvičenie pre náročnejších programátorov. Obsahuje rozklad slov na písmená, vyžaduje vykonať náhodnú zmenu poradia vnútorných písmen a – ak je známa frekvenčná tabuľka najčastejších dvojíc a trojíc – môže úloha požadovať aj redukciu počtu frekventovaných skupín.

Účelovo budované nezmysly

Výkladový slovník [4] definuje matematiku ako vedu, ktorá sa zaoberá „*číslami a operáciami a s nimi, ich vzťahmi, kombináciami, zovšeobecňovaním a abstrahovaním, ako aj priestorom, konfiguráciami a ich štruktúrami, ich meraním, transformáciami a zovšeobecňovaním*.“ Výučba matematiky sa však často redukuje iba na prvé zložky v uvedenom zozname, teda na čísla a operácie s nimi, resp. na priestor a jeho štruktúry. Menej času sa venuje vzťahom medzi uvažovanými objektmi a ich zovšeobecňovaniu, hoci práve ony tvoria jeden zo základov kritického myslenia. Na ich rozvoj a upevňovanie sa dá využiť iný druh nezmyselných textov:

Bača Demeter je môj kamarát. Poznám ho dávno, od zajtra. Keď som ho naposledy navštívil, pásol ovce.

„Na tejto lúke som ešte nebol,“ vravím. „Je krásne kruhová.“

Bača: „Veru, veru. Má rovnako dlhé strany: tristo, štyristo a päťsto metrov.“

Ja na to: „Takže tvorí štvorec.“

Úlohou žiakov je odhaliť nezmyselné tvrdenia a odôvodniť, čím protirečia realite. V rámci cvičenia môžu podobné texty aj vytvárať. To im dovolí pochopiť a zovšeobecniť rozpor medzi potenciálom písaného textu a realitou. Písaný text môže byť (teoreticky) neohraničene voľný. Ak má však reflektovať realitu, musí zohľadniť je zákonitosti – voľnosť bude ňou limitovaná.

Využitie vo výučbe matematiky

Len ten, kto má príslušné poznatky, dokáže nájsť v texte protirečenia. Odôvodniť, v čom spočíva problém, je ešte dôležitejšie. Uvedieme príklady:

- Porušenie súslednosti časov: *Poznám ho dávno, od zajtra.*
- Priraďovanie neexistujúcich vlastností k objektu: *Kruh nemá strany*.
- Rozpor vlastností: *Strany dlhé 300, 400 a 500 metrov sú vraj rovnako dlhé*.
- Vlastnosť jedného objektu je priradená inému: *Tri strany má trojuholník, nie štvorec*.

Tvorivosť v tejto oblasti je neobmedzená a je vhodné do nej zapojiť žiakov. Napríklad v podobe „dôkazu“ o počte strán: *Trojuholník má tri uhly. Uhol je vytvorený dvomi stranami. Trojuholník má preto šesť strán*.

Žiaci môžu sami navrhovať ďalšie typy protirečení vzťahujúcich sa na vzhľad matematický objektov (*Líši sa modrá kocka od červenej aj niečím iným ako farbou?*), názvoslovia (*Je kockou Rubikova kocka? Prečo áno alebo prečo nie?*) alebo výskytom v reálnom živote (*Má kockový cukor tvar kocky?*). Podobné úlohy sa môžu stať predmetom diskusií v triede. Pri úlohách typu – prečo áno, prečo nie – je vhodné rozdeliť kolektív na zástancov a oponentov daného názoru. Pri hodnotení oceňovať nielen kvalitu a správnosť tvrdení, ale aj argumentačnú silu a vynaliezavosť oponentov zastupujúcich chybný názor, predovšetkým ich ochotu priznať si omyl.

Využitie vo výučbe materinského jazyka

Čítanie s porozumením je opakujúcim sa problémom našich žiakov. Klesajúce výsledky v hodnotení PISA [4] naznačujú, že opatrenia na zlepšenie nie sú dostačujúce. Jedným z nástrojov riešenia podporujúcich udržiavanie pozornosti počas čítania môžu byť texty obsahujúce protirečenia a nezmysly. Ich odhalenie nie je totiž možné bez sústredenia sa na sémantiku prečítaného, t. j. bez pochopenia významu. Súbežným efektom je aj potešenie a zábava spojená s pochopením pointy, ktoré môžu viesť k zvýšenému záujmu o čítanie aj ďalších textov.

Čítaním popletených textov sa žiaci naučia aj pochybovať o absolútnej pravdivosti prečítaného textu. Vďaka tomu sa môžu stať aj odolnejšími voči hoaxom a konšpiračným teóriám. Napríklad upozornenie na chybnú časovú súslednosť by malo viesť k opatrnosti pri analýze vzťahu príčina-následok. Mnoho konšpiračných teórií totiž vychádza práve z nesprávneho (či úmyselne nesprávneho) vzťahu medzi nimi. Tvorba slohových prác s úmyselnými nesprávnymi vzťahmi navyše rozvíja kreativitu – vymyslieť „krásny“ nezmysel totiž nie je jednoduché.

Využitie vo výučbe informatiky

Počítačový program nie je náhodný zhluk inštrukcií programovacieho jazyka. Podobne ako matematické nezmysly protirečia realite a/alebo pôvodnému úmyslu zadávateľa, aj nesprávne zoradené a/alebo chybne navrhnuté inštrukcie produkujú iný ako očakávaný výsledok. Časť výučby musí byť preto venovaná opravám a úpravám programov.

Ladenie vlastných chýb je síce bežnou súčasťou kurzov programovania – ide však o iný problém. Programátor totiž pozná vlastný zámer a hľadá (ne)súlad medzi úmyslom a jeho realizáciou. Pri zásahoch do cudzieho programu však má oveľa menej informácii a musí sa k nej postupne prepracovať. Učiteľ by mu mal poradiť, aké stratégie je vhodné použiť a čo sa počas nich dozvie. Zadanie tohto typu sú totiž v praxi časté a absolvent by mal poznať aspoň najbežnejšie nástroje, ktoré sa pri modifikáciách cudzích programov využívajú.

Ďalšou možnosťou využitia nezmyslov predstavujú odkazy na ich výskyt na internete. Podobnými absurditami sa dá demonštrovať, že nepravdivosť názoru „na internete je všetko“. V rukopise [7] na otázku, čo bude na večeru, odpovedá bača: *Guláš z ťavích parohov – recept som našiel na internete*. Aj nie príliš vynaliezavému poslucháčovi bude ihneď jasné, že presvedčenie o všemohúcnosti internetu nemá presvedčivý základ.

Záver

Súčasný vzdelávací systém vznikol v začiatkom 19. storočia v úplne iných sociálno-ekonomických podmienkach. Ako konštatuje sir Ken Robinson, vo vzdelaných vrstách prevládala skepsa o zmysluplnosti masového vzdelávania: „*Deti ulice, deti robotníkov nemôžu mať úžitok zo všeobecného vzdelávania. Nie sú schopné naučiť sa čítať a písať, tak prečo by tým mali márniť čas?*“ Podobná skepsa dnes zasahuje dnes vzdelávanie v oblasti matematiky a prírodných vied: *Načo sú nám v čase počítačov – o to viac, že nie sú obľúbené a žiaci v nich dosahujú slabšie výsledky?* Robinson upozorňuje na skutočnosť, že žiakom chýba počas vzdelávania estetický zážitok. Vzdelanie sa „industrializovalo“: presne určená dĺžka pracovného času, oddelené priestory pre jednotlivé činnosti a predmety, obsah sa redukuje na splnenie predpísaných testov a prijímacích skúšok. Najlepší študenti asi dokážu mať estetický zážitok (či pocit „heuréka“) z matematiky aj dnes, ale pre ostatných je sotva predstaviteľný.

Prepojením matematiky so zábavou sa šanca získať tento pocit zvyšuje. Žiak nemusí mať matematický talent na to, aby zistil počet permutácií vnútorných písmen, ani na to, aby usúdil, že ich opakovanie tento počet znižuje. Z teoretického hľadiska ide o istý variant konštruktivistického prístupu k vzdelávaniu [6], v ktorom sa dôraz kladie na úsmevnejšie formulovanie úloh s cieľmi:

- zvýšiť motiváciu prostredníctvom úloh, v ktorých sa matematická podstata objavuje až „v druhom kole“,
- poskytnúť umelecký zážitok, ktorý ozvláštni úlohu a uvoľní atmosféru,

- prezentovať prítomnosť medzipredmetových vzťahov inak ako ich rigidným (niekedy až vynúteným) začlenením do vyučovacieho procesu.

Deti majú radi tento „inverzný“ prístup k vzdelávaniu, pri ktorom vzdelávanie nevyzerá veľmi ako vzdelávanie, skôr ako hra s predstavivosťou. Vo svete už desiatky rokov vznikajú knihy s týmto zameraním, napríklad [8, 9]. Našťastie, aj u nás už prestávajú byť takéto knihy výnimkou. Medzi prvé patril Pištáčik [10], ktorého prvé vydanie sa datuje do sedemdesiatych rokov minulého storočia.

Samozrejme, nedá sa očakávať transformácia celého vyučovacieho procesu týmto smerom. Niektoré jeho zložky (napríklad malá násobilka či vybrané slová) sa bez dávky drilu nezaobídu. Uvedené úlohy treba skôr chápať ako ukážky, dovoľujúce uvoľniť strnulú atmosféru v učebniach a obohatiť mimoškolskú činnosť vedúcu k „vzdelávaniu“ v najširšom slova zmysle. Ich neposlednou výhodou je skutočnosť, že ich dokážu vytvárať žiaci aj učitelia a tým si rozvíjať vlastné kreatívne myslenie.

Literatúra

[1] Jonathan Grainger, Carol Whithey: *Does the huamn mnid raed wrods as a wlohe? Trends in Cognitive Sciences,* Vol, 8, No. 2 (Feb. 2004), str. 58-59.

[2] Jozef Hvorecký: *Matematika v kontexte*. Zborník konferencie Dva dni s didaktikou matematiky, FMFI UK, Bratislava, 2018, str. 49-56. Dostupné na internete: https://www.ddm.fmph.uniba.sk/files/DvaDni/Zbornik2018.pdf

[3] Matej Považaj: *Pravidlá slovenského pravopisu, 3. upravené a doplnené vydanie*, Bratislava, SAV, 2000

[4] *Merriam-Webster Dictionary*, New York, Merriam-Webster, 2016, ISBN 978-0877792956

[5] MŠVVŠ SR: *Výsledky slovenských 15-ročných žiakov sú podľa medzinárodnej štúdie PISA pod priemerom krajín OECD*. Dostupné na internete: https://www.minedu.sk/vysledky-slovenskych-15-rocnych-ziakov-su-podla-medzinarodnej-studie-pisa-2015-pod-priemerom-krajin-oecd/

[5] Ken Robinson: *Changing Education Paradigms*. Dostupné na internete: http://www.cfpscourseweb.com/pluginfile.php/1099/block_html/content/RSA%20%20Ken%20Robinson%20Lecture%20-%20transcript.pdf

[6] Milan Hejný, František Kuřina: *Dítě, škola a matematika: Konstruktivistické přístupy k vyučování.* Praha, Portál, 2001

[7] Jozef Hvorecký: *Meňavce, 2. diel* (pripravovaný rukopis)

[8] Lewis Caroll: *Alica v krajine zázrakov*. Bratislava, Naše Vojsko, 2016

[9] Astrid Lindgren: *Pipi Dlhá Pančucha*, Bratislava, Slovart, 2010

[10] Dušan Dušek: Pištáčik. Slovart, 2016

Prof. RNDr. Jozef Hvorecký, PhD.
University of Liverpool, UK
e-mail: Jozef@Hvorecky.com

NAČO BOL PTOLEMAIOVI ZLATÝ REZ?

ZBYNĚK KUBÁČEK

ABSTRAKT. *Podľahol aj Klaudios Ptolemaios (to je ten pán spájaný s geocentrickým modelom vesmíru) módnej vlne a videl zlatý rez všade okolo seba? Alebo to bolo inak?*

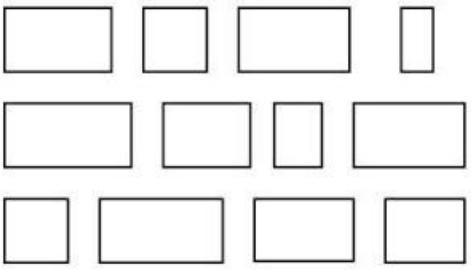
Pripomeňme definíciu

Na definíciu zlatého rezu narazíme už tri storočia pred naším letopočtom (len vtedy sa ešte tento pomer nenazýval „zlatý“) v šiestej knihe Euklidových Základov. Pripomeňme, že bod Z rozdeľuje úsečku XY na dve časti v pomere zlatého rezu, ak pomer dĺžok celej úsečky a dlhšej časti je rovnaký ako pomer dĺžok dlhšej a kratšej časti. Ak dlhšia časť má dĺžku a a kratšia dĺžku b a ak hľadaný pomer $\frac{a}{b}$označíme φ, tak uvedená podmienka má podobu $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$, odtiaľ postupne $1 + \frac{b}{a} = \frac{a}{b}$, $1 + \frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{a}{b}$, $1 + \frac{1}{\varphi} = \varphi$, $\varphi + 1 = \varphi^2$, $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$, $\varphi = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ .Hľadaný pomer je iste kladné číslo, preto

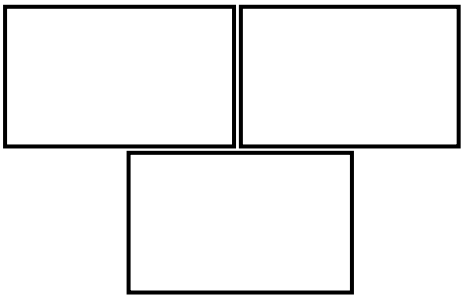
$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618\,033\,988\,749\ \ldots . \tag{1}$$

Trocha skepticizmu k všetkým možným výskytom zlatého rezu

V učebniciach aj populárnych knižkách o matematike sa zlatý rez spravidla uvádza ako príklad prepojenia matematiky a umenia. Skoro povinnou súčasťou takýchto zmienok je Fibonacciho postupnosť, Partenón na aténskej Akropole a ulita lodenky. Len veľmi neradi poznamenávame, že prinajmenšom na posledné dva z týchto príkladov sa vzťahuje slávna veta z JirotkovhoSaturnina: „Domnívámse, že o správnosti vašich informací dalo by se s úspěchempochybovat.“ Obľúbené sú tiež rôzne testy, v ktorých má účastník z viacerých ponúkaných obdĺžnikov vybrať ten, ktorý sa mu zdá najkrajší, pozri obr. 1. Testy nám nevadia, len unáhlené uzávery tvrdiace, že keďže prevažná väčšina dopytovaných si z ponúkaných možností vybrala obdĺžnik s dĺžkami strán v pomere zlatého rezu (ktorý bol medzi ponúkanými), musí byť práve zlatý rez ten najkrajší. Aj k tomu máme – opäť veľmi neradi – impertinentnú poznámku: keby to mal byť skutočne *presne* zlatý rez a nič iné, tak by to nemohol byť ani pomer 1,6:1, ani pomer 1,62:1, ale presne 1,618 033 988 ... : 1. V takom prípade by bol namieste náš test na obr. 2: vyberte z týchto troch obdĺžnikov ten, ktorý sa vám zdá najkrajší.



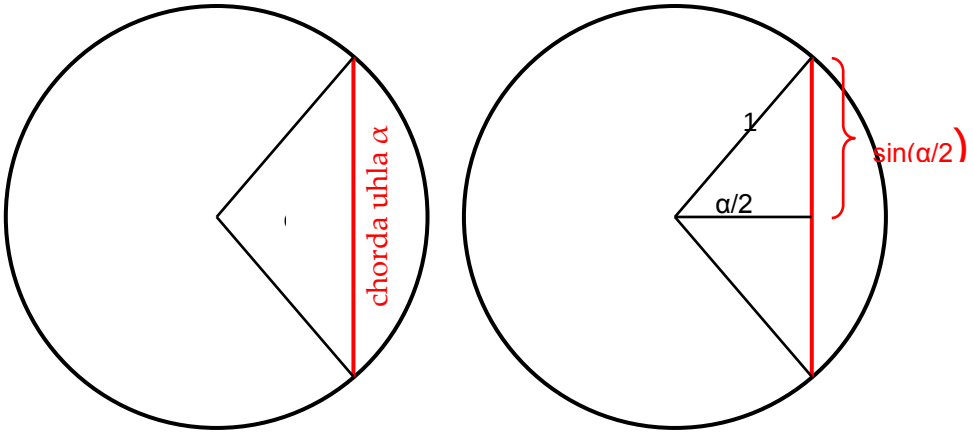
Obrázok 1: Ktorý z týchto obdĺžnikov je najkrajší?



Obrázok 2: A z týchto?

Inšpirácia Ptolemaiom

V tomto príspevku chceme pripomenúť iné – oveľa zriedkavejšie spomínané – využitie zlatého rezu. Inšpiráciu sme našli v úvodnej matematickej časti PtolemaiovhoAlmagestu, kde sa okrem iného zostrojuje tabuľka hodnôt pre chordu uhla. Keďže platí $\mathrm{crd}\ \alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}$ (pozri obr. 3), budeme – na rozdiel od Ptolemaia – pracovať so sínusmi (a kosínusmi), ktoré sú nám bližšie.



Obrázok 3: Chorda uhla α a jej súvis s hodnotou $sin\frac{\alpha}{2}$.

Opíšme stručne – a zjednodušene – myšlienku Ptolemaiovho postupu aplikovanú na sínusy a kosínusy. Náš cieľ (ktorý – ako čitateľ s údivom zistí – nesplníme) je nájsť hodnoty sínusov a kosínusov uhlov 1°, 2°, 3°, atď. Najprv odvodíme vzorce pre sínus a kosínus súčtu, rozdielu a polovičného uhla. Keby sme poznali hodnotu sínusu a kosínusu 1°, mohli by sme hodnoty sínusu a kosínusu 2°, 3°, atď. nájsť postupne pomocou súčtových vzorcov. Hodnoty sínusov a kosínusov niektorých uhlov poznáme – tými základnými sú uhly 30°, 60° a 45°. Pomocou vzorcov pre rozdiel (alebo polovičný uhol) vieme potom nájsť sínus a kosínus 15°. Ak však chceme nájsť sínus a kosínus niektorého menšieho celočíselného

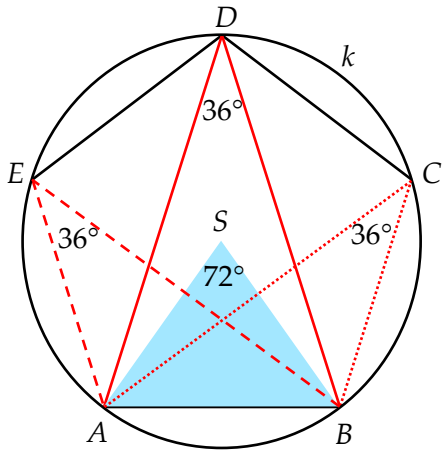
násobku uhla 1° (menšieho než 15°), potrebujeme poznať sínus a kosínus nejakého ďalšieho uhla. A tu vstupuje do hry zlatý rez – ten totiž súvisí s hodnotou $\cos 36°$. O chvíľu ukážeme, ako nájsť hodnotu $\cos 36°$, hneď však prezraďme, ako ju využijeme:

– z hodnoty $\cos 36°$ vieme nájsť hodnotu $\sin 36°$,
– keď poznáme sínus a kosínus uhlov 36° a 30°, vieme pomocou vzorcov pre sínus a kosínus rozdielu nájsť sínus a kosínus uhla 6°, z neho potom pomocou vzorcov pre polovičný uhol sínus a kosínus uhla 3° (a z neho hodnoty pre uhly 1,5° a 0,75°).

Ďalší postup už presahuje hranice štandardnej matematiky strednej školy: z hodnôt sínusu a kosínusu uhlov 1,5° a 0,75° odhadneme dostatočne presne hodnotu sínusu a kosínusu uhla 1°.

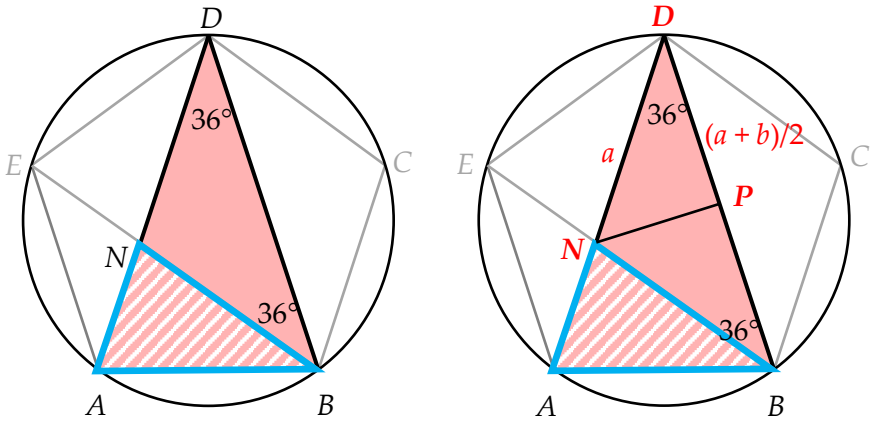
Ako vidno, na to, aby sme celý opísaný aparát uviedli do pohybu, stačí nájsť kosínus uhla 36°. Úvahy o tomto uhle súvisia s vlastnosťami pravidelného päťuholníka $ABCDE$, pozri obr. 4. V ňom pre veľkosť stredového uhla ASB platí: $|\sphericalangle ASB| = \frac{360°}{5} = 72°$, preto obvodové uhly AEB, ADB a ACB majú všetky veľkosť $\frac{72°}{2} = 36°$. Rovnako možno zdôvodniť, že veľkosť 36° majú aj uhly EBD, EBA, DAC a CAB (a teda uhol DAB má veľkosť 72°). Z toho už vyplýva, že rovnoramenné trojuholníky DAB a BNA (sú zvýraznené na obr. 5) sú podobné. Z ich podobnosti vyplýva

$$\frac{DA}{AB} = \frac{BN}{NA}. \tag{2}$$



Obrázok 4: Uhly v pravidelnom päťuholníku.

Keďže platí $AB = BN = ND$ (trojuholníky ABN a BND sú obidva rovnoramenné), možno (2) zapísať v tvare $\frac{DA}{ND} = \frac{ND}{NA}$. To znamená, že bod N rozdeľuje úsečku AD v pomere zlatého rezu. Ak teda – rovnako ako v úvode tohto textu – označíme a dĺžku úsečky ND a b dĺžku AN, tak úsečky AD a BD majú dĺžku $a + b$ a úsečka PD (P je päta kolmice z bodu N na stranu BD) má dĺžku $\frac{a+b}{2}$, pozri obr. 5 vpravo.



Obrázok 5: Trojuholníky DAB a BNAsú podobné, hodnotu $\cos 36°$ vieme vypočítať z pravouhlého trojuholníka NPD.

Hodnotu $\cos 36°$ potom vieme vypočítať z pravouhlého trojuholníka NPD:

$$\cos 36° = \frac{\frac{a+b}{2}}{a} = = \frac{1}{2} \cdot \frac{a+b}{a} = \frac{1}{2} \cdot \varphi = \frac{1}{2} \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{4} = 0{,}809\,016\,994\,374\,947 \ \ldots \ .$$

Literatúra

[1] Heath, Thomas: *A HistoryofGreekMathematics. Volume II.* Oxford, Clarendon Press, 1921.

doc. RNDr. Zbyněk Kubáček, CSc.
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave
Mlynská dolina
SK – 842 48 Bratislava
e-mail: kubacek@fmph.uniba.sk

ZHODNÉ ZOBRAZENIA V RÔZNYCH HUDOBNÝCH DIELACH

KATARÍNA LAŠŠOVÁ

ABSTRAKT. *Prepojenie geometrie a hudby je netradičné a takmer nevyužívané vo vyučovacom procese. Vytvorili sme preto pracovný list z uvedenej problematiky pre žiakov stredných škôl, ktorého riešenia poukazujú na to, že aj takáto forma vyučovania má svoje miesto vo vyučovacom procese.*

V práci sme sa sústredili na zhodné zobrazenia používané v školskej praxi. Vytvorili sme pracovný list pre žiakov stredných škôl, ktorý obsahoval sedem úloh. Tieto úlohy boli navzájom typovo odlišné. Ich hudobný základ sme vyňali z rôznych hudobných skladieb, alebo použili časť hudobného nástroja.

Cieľom empirického výskumu bolo zistiť, ako žiaci vedia prepojiť ich vlastné matematické vedomosti v úlohách, ktoré svojimi netypickými zadaniami súvisia s hudobným umením. Touto netradičnou formou sme chceli podporiť medzipredmetové vzťahy. Vypracované úlohy žiakmi sme hodnotili formatívne.

Text v pracovnom liste je výrazne pestrofarebný, písaný hravým písmom a doplnený úsmevnými obrázkami, ktoré mali motivovať žiakov k pozitívnemu prístupu k práci. V jednotlivých zadaniach úloh sme zvýraznili aj typ zobrazenia, s ktorým by žiaci mali pracovať a upozornili sme ich na to, že budú využívať vo svojich riešeniach len hlavičky nôt. Žiaci, ktorí nie sú hudobníci, vidia noty iba ako akýsi útvar, symboliku, niečo neznáme, nečitateľné. Vidia teda skupinu znakov, o ktorých vedia, že sa podľa nich dá spievať a hrať na nástroji, resp. tvoriť hudba. A keďže noty nemusíme vnímať len ako „hudobné písmenká“, ale aj ako konkrétny geometrický útvar, mohli sme skúsiť pracovať s nimi aj na vyučovacích hodinách matematiky.

Literatúra

[1] Czerny, C.:*Škola zběhlosti*, Praha, Státní hudební vydavatelství, 1966,

[2] Mozart, W. A et. al.: *Moje piesne*,Bratislava,OPUS – československé hudobné vydavateľstvo,1988, ISBN 62-030-88

[3] Mozart, W. A.:*Sonaten für klavier zu zwei Händen,* Leipzig, Edition Peters,

[4] Rumanová, L. – Vallo, D.:*Geometria – vybrané kapitoly*,Nitra, Prírodovedec FPV UKF v Nitre, 2009, ISBN 978-80-8094-567-1

[5] Schneider-Trnavský, M.:*JEDNOTNÝ KATOLÍCKY SPEVNÍK.* Bratislava, Spolok sv. Vojtecha, 1986,

Bc. Katarína Laššová
Univerzita Konštantína Filozofa v Nitre
Tr. A. Hlinku 1
949 74 Nitra
katarinkalass@gmail.com

OBJEVUJEME V MATEMATICE

JARMILA NOVOTNÁ

ABSTRAKT. *V článku jsou shrnuty základní myšlenky z dílny věnované objevování ve vyučování matematice. Pozornost je věnována hlavně těmto aspektům problematiky: etapy objevování, příprava učitele před zařazením objevování do výuky, organizace objevovací aktivity ve třídě, případně mimo ni, role žáků a učitele při objevovací situaci.*

Motto: Zábavnost vyučování nejen že není v rozporu s jeho užitečností, ale právě naopak je absolutně základní podmínkou pro to, aby výuka ovlivnila život budoucího dospělého člověka.

P. Hilton

Úvod

Ve školní matematice je stále větší pozornost věnována přístupům, které zahrnují experimentování, záznam dat, pozorování, odhalování zákonitostí, zobecňování a ověřování hypotéz. Takové přístupy současně podporují individualizaci vyučovacího procesu a zohlednění různých učebních stylů žáků.

Jednou z možných vyučovacích metod, která splňuje tyto požadavky, je matematické objevování založené na řešení úloh. Objevování problému nebo situace zahrnuje takové procesy, jako je např. spontánní objevování, interpretování, formulování úloh, systematické objevování, získávání a záznam dat, formulování a testování hypotéz, odůvodňování, komunikace.

Etapy objevování

Matematické objevování můžeme rozdělit do několika základních etap:

- *(Nesystematické) poznávání situace*, které může probíhat individuálně, v malých skupinách nebo v celé třídě. V této etapě jsou nesystematicky získávány zkušenosti související se zadanou situací. Je to etapa nezastupitelná, protože v jejím průběhu řešitelé získávají aspoň částečný vhled do situace a mohou odhalit efektivní způsob další práce.
- *Systematické zkoumání*. V této etapě jsou výsledky zaznamenávány organizovanou formou, která umožňuje snáze nacházet zákonitosti, vzájemné vztahy, strukturu.
- *Tvorba hypotéz*, kam patří např. zobecňování výsledků na více případů, než bylo zkoumáno v předchozích etapách, nebo předpovídání výsledků pro další případy.

- *Testování hypotéz.* Většina hypotéz vyslovených v předchozí etapě vyžaduje ověření jejich správnosti. To může probíhat buď formou hledání/nalezení vhodného protipříkladu (který hypotézu vyvrací), nebo jejím (různě podrobným) odůvodněním.
- *Vysvětlování* nebo *prokazování*, které provádíme vždy, ať se platnost hypotézy podařilo ověřit nebo vyvrátit. V této etapě se může stát, že žáci v návaznosti na hypotézu objeví, případně navrhnou další hypotézy, které dosud nezkoumali. Pak se často vracejí k předchozí etapě a pracují s nově formulovanou hypotézou.
- *Rozvinutí situace*, při němž je možno sledovat další související úlohy a směry zkoumání. Tato etapa často nebývá samostatná, ale prolíná všemi ostatními etapami.
- *Shrnutí*, při němž se písemnou nebo ústní formou přehledně uvádí, co bylo získáno v předchozích etapách, jak by bylo možno dále pokračovat, co zůstalo nedokončeno a proč apod. Tato etapa by měla u žáků podporovat schopnost systematicky shrnout získané poznání a pomocí tohoto přehledu docílit lepšího vhledu do problematiky. Současně podporuje kritický pohled na dosažené výsledky a schopnost jasně formulovat myšlenky a obhajovat vlastní názor.

Zařazení objevování do hodin matematiky

Matematické objevování může být formulováno s různou mírou otevřenosti/uzavřenosti. Je možné specifikovat pouze jeden nebo dva aspekty dané situace, případně formulovat formou otázek nebo konkrétních úkolů požadované výsledky, na druhé straně je však také možno pouze popsat situaci a nechat žáky vyhledávat různé dílčí úkoly na základě jejich vlastního rozhodnutí.

Učitel by měl mít jasnou představu o cílech, které zařazením zkoumání sleduje, hlavně o tom, co by měli žáci při této aktivitě získat. S tímto aspektem souvisí také rozhodnutí učitele, jaké pomůcky a další materiál budou žáci při svých činnostech potřebovat a zda si budou schopni vše vytvořit nebo opatřit sami.

Jestliže se učitel seznámí se situací, na níž je aktivita založena, co nejpodrobněji před jejím zařazením do konkrétního vyučování, umožní mu to lepší spolupráci s žáky, usnadní mu to konzultační činnost (pokud o ni žáci projeví zájem) i usměrňování činností jednotlivých žáků nebo skupin tak, aby bylo možno dosáhnout plánovaných cílů.

Při prvních kontaktech se situací určenou k objevování je vhodné volit některé dílčí úkoly, které žákům pomohou se situací se seznámit. Pokud se učiteli podaří na počátku zařadit úkoly, v nichž žáci s velkou pravděpodobností získají nějaké výsledky, má to výrazně motivující charakter. Náročnější zkoumání je možno zařadit až později, kdy žáci již mají větší zkušenosti se zpracovávanou situací.

Mezi základní informace, které by žáci měli při zahájení činnosti mít k dispozici, patří: doba trvání, typy činností (individuální, skupinová apod.), místo, kde bude zkoumání probíhat (ve vyučování, mimo školu), množství a způsob konzultací, způsob ukončení (písemné, ústní, forma obhajoby, konference apod.), kdo a jak bude výsledky hodnotit. Nejčastěji využívaný způsob zahájení práce při matematickém zkoumání je vstupní společné seznámení se situací a vyřešení některých méně obtížných dílčích úkolů. Pak může následovat jak individuální práce ve škole nebo mimo školu, tak skupinová práce.

Řeší-li žáci stejné úkoly, má to zřejmé výhody: společné podklady pro diskusi, snazší zhodnocení výsledků, získání společného základu pro další různorodé úkoly. Současně

učitel může lépe rozeznat úroveň uchopení situace žáky, případně pokrok, kterého žáci dosáhli. Individualizace úkolů podporuje tvořivost a samostatnost žáků při řešení úloh.

Použití návodů a rozšíření

Hlavním úkolem *návodů* je nabízet žákům otázky, které jim mohou pomoci získat hlubší vhled do situace a podpořit jejich objevitelské aktivity. Návody mohou mít psanou formu nebo mohou být formulovány ústně přímo při zkoumání situace. Důležité je, aby jazyk, kterým jsou žákům prezentovány, odpovídal jejich úrovni.

Pokud mají žáci návody k dispozici příliš brzy, mnozí z nich se na ně spolehnou a nerozvíjí konstruktivním způsobem své poznání. Jestliže však po nějaké době, v níž se žák (nebo skupina žáků) snaží situaci zpracovat, nemá odpovídající výsledky, je často prospěšné, když si učitel nechá od žáka/skupiny nejprve vysvětlit, jak postupují a jak plánují postupovat. Teprve pokud ani toto vysvětlení nevede k pokroku, je vhodné žákovi pomoci některým vhodným návodem. Úkolem návodu je pomoci žákovi pokročit při řešení jeho úkolu, ne mu detailně a přesně vymezit jednotlivé kroky jeho další práce.

Úkolem *rozšíření* je získat nové motivující podněty pro ty žáky, kteří postupují při zkoumání situace rychle a úspěšně a základní situace pro ně není dostatečně motivující. Opět závisí na konkrétní situaci, jakou formou jsou rozšíření zadávána, kterým směrem je žák nasměrován a do jaké míry jsou tato rozšíření otevřená.

Dvě ukázky objevovacích situací

Uvádíme dvě ukázky situací vhodných po objevování ve vyučování matematice [1]. Záleží na učiteli, jak otevřenou situaci a jaké prostředí (včetně pomůcek, které budou moci použít) pro objevování nabídne.

Body na kružnici

Na kružnici vyznačte několik bodů a spojte je úsečkami. Zkoumejte.

[Dá se např. zkoumat, kolik úseček v kruhu bude, na kolik oblastí se úsečkami rozdělí kruh, kolik průsečíků úseček v kruhu bude, kdy odpovědi závisí na vlastnostech rozložení bodů na kružnici a jak, a to buď pro konkrétní počty bodů, nebo obecně pro *n* bodů, apod.]

Sudá a lichá

Zkoumejte posloupnosti přirozených čísel vytvářených pomocí těchto dvou pravidel:

- Je-li číslo liché, další číslo je o 1 menší.
- Je-li číslo sudé, je další číslo rovno jeho polovině.

Např. posloupnost začínající číslem 52 je 52, 26, 13, 12, 6, 3, 2, 1, 0.

[Dá se např. zkoumat, jak vypadá zakončení všech takových posloupností (žáci někdy udělají závěr z několika nesystematických pokusů, který nemusí být vždy pravdivý), zda mohou být za sebou dvě lichá čísla, dvě sudá čísla, tří sudá čísla apod., pro jaká čísla posloupnost „klesá nejrychleji“ apod.]

Závěrečné poznámky

Konstruktivistický přístup k vyučování vychází z přesvědčení, že učení je dynamický proces, ve kterém žáci musí být aktivními účastníky. K aktivnímu přístupu k učení lze žáky

podněcovat různými způsoby. Objevování je jednou z typických aktivit v tomto směru. Tak, jak je představeno v tomto textu, je objevování zorganizováno ve formě didaktické situace ve smyslu Teorie didaktických situací [2].

Cílem dílny bylo ukázat na konkrétních materiálech široké možnosti, které zařazování objevování do vyučování matematice přináší, a usnadnit učitelům přípravu takových situací.

Literatura

[1] Bastow, Barry, Hughes, Jill, Kissane, Barry, Mortlock, Roly: *40 Mathematical Investigations*, Subiaco, The Mathematical Association of Western Australia, 1951, ISBN 0-949278-23-8.

[2] Brousseau, Guy: *Úvod do teorie didaktických situací*, Praha, Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta, 2012, ISBN 978-80-7290-600-0.

Prof. RNDr. Jarmila Novotná, CSc.
Univerzita Karlova, Pedagogická fakulta
Magdalény Rettigové 4
CZ – 116 39 Praha 1
jarmila.novotna@pedf.cuni.cz

HRA SO ŠTYRMI POHÁRMI

JOZEF RAJNÍK

V príspevku prezentujeme využitie Hry so štyrmi pohármi (angl. Four glasses puzzle) od Martina Gardnera [1, 2] na hodinách alebo krúžkoch matematiky. Pomocou tejto hry si žiaci môžu vyskúšať hravou formou objaviť víťaznú stratégiu pre jedného z hráčov. Taktiež rozvíja u nich schopnosť argumentácie.Hra je určená na 60 min. Je vhodné priniesť žiakom poháre (napr. plastové) spolu s podložkami (ideálne štvorcovými), s ktorými si môžu vo dvojiciach skúšať hru hrať.

Zadanie problému. *Dvaja hráči, slepý a vidiaci, hrajú hru. Na začiatku vidiaci umiestni do rohov štvorcovej tácky 4 poháre, každý v ľubovoľnej orientácii (hore / dole dnom). Potom sa slepý a vidiaci striedajú v ťahoch. Slepý v každom svojom ťahu zoberie do rúk ľubovoľné dva poháre, pričom cíti ich orientáciu a v ľubovoľnej orientácii ich vráti späť na miesto. Vidiaci vo svojom ťahu otočí tácku o ľubovoľný násobok 90°. Slepý vyhrá v momente, keď sú všetky poháre otočené rovnako. Vie si slepý zaručiť výhru bez ohľadu na ťahy vidiaceho?*

Žiaci po chvíli hrania objavia, že slepý po čase vždy vyhrá. Zaistí mu to však zákon pravdepodobnosti. Na to nadviažeme upravenou verziou hry.

Modifikácia problému. *Slepý ukáže, ktoré dva poháre ide brať. Následne vidiaci otočí tácku a až potom slepý vykoná svoj ťah s pohármi, na ktoré ukázal.*

Táto verzia hry už vyzerá priaznivo pre vidiaceho. Navyše, žiaci si môžu skúšať rôzne stratégie. Časom väčšina začne rozoberať prípady s cieľom ukázať, že slepý nemôže vyhrať. Dôslednou analýzou prípadov možno objaviť, že existuje konfigurácia pohárov, z ktorej si môže slepý zaručiť výhru. Potom už len stačí nájsť tú správnu postupnosť ťahov. Stratégie sú rôzne, najlepšia známa pozostáva z piatich ťahov

Hru sme skúšali na matematickom krúžku (2. až 4. r. SŠ), Letnej škole Trojstenu (SŠ) a sústredení SEZAM-u (7. až 9. roč. ZŠ). Pozorovali sme pri tom ťažkosti pochopiť, ako modifikácia problému súvisí s pôvodným zadaním. Preto odporúčame predstaviť ich ako dva separátne problémy a otázku o ich súvise predostrieť až na záver.

Literatúra

[1] Martin Gardner: *About rectangling rectangles, parodying Poe and many another pleasing problem*, Mathematical Games, Sci. Amer., vol 240, no. 2 (február 1979) s. 16 – 24.

[2] Martin Gardner: *On altering the past, delaying the future and other ways of tampering with time,*Mathematical Games, Sci. Amer., vol 240, no. 3 (marec 1979) s. 21 – 30.

Mgr. Jozef Rajník
Gymnázium Grösslingová 18
811 09 Bratislava, e-mail: jozef.rajnik@gamca.sk

MATURITNÁ SKÚŠKA Z MATEMATIKY – HISTORICKÝ POHĽAD

MONIKA REITEROVÁ, LUJZA ČIPKOVÁ HAMPLOVÁ

ABSTRAKT. *V príspevku stručne opisujeme históriu maturitnej skúšky s akcentom na matematiku na našom území v minulosti. Jednotlivé modely maturitnej skúšky sú doplnené historickými faktami o vývoji nášho školstva v stredoeurópskom priestore.*

Maturita pochádza z latinského „maturitas“ (zrelosť, dospelosť). Skutočné maturity boli v strednej Európe zavedené až po roku **1834** ako dohliadací nástroj štátu, ktorý sa pomocou maturitného vysvedčenia bránil prieniku nespoľahlivých absolventov stredných škôl do štátnej služby. V období, keď bolo Slovensko súčasťou Rakúsko-Uhorska, za vlády Márie Terézie a jej syna Jozefa II., sa uskutočnili reformy v oblasti školstva. Mali pomôcť centralizovať štátnu moc prostredníctvom škôl a mal vzniknúť rakúsky národ ako jediná štátna národnosť i jeden úradný jazyk (nemecký). Školstvo v Uhorsku sa vyvíjalo v oveľa zložitejších hospodárskych a politických pomeroch ako v ostatných častiach monarchie. Mária Terézia sa po zreformovaní rakúskeho školstva pokúsila aj o reformáciu škôl v Uhorsku. V roku **1752** bol vydaný predpis, ktorý podriadil gymnáziá štátnemu dozoru a upravil výučbu na týchto školách. V 18. stor. sa matematika a prírodné vedy mali vyučovať len „pre zábavu“. V roku **1805** nastala prvá väčšia reforma gymnázií. Matematika mala v každom ročníku 2 hodiny týždenne. Matematika a prírodné vedy boli opäť od roku **1819** z osnov vylúčené. V roku **1849** bola Exner – Bonitzova reforma, ktorá sa usilovala o vyváženosť humanitných predmetov s exaktnými odbormi. Vznikli nové gymnáziá, ktoré poskytovali nadaným deťom prístup k vzdelaniu a zavedenie maturity zabezpečovalo istú úroveň absolventov. Maturita poskytovala oprávnenie na univerzitné štúdium či na vstup do štátnych služieb. [2] Vznikol prvý model maturitnej skúšky s písomnou a ústnou časťou.

Od roku **1849** bol Model 6 + 7, v ktorom písomnú skúšku tvorila slohová práca v materinskom jazyku, preklad z latinčiny, preklad z gréčtiny, preklad do latinčiny, práca z matematiky, práca v ďalšom živom jazyku; ústnu skúšku tvorila literatúra materinského jazyka, latinský jazyk a literatúra, gréčtina a literatúra, dejepis a zemepis, matematika, prírodné vedy a fyzika, gramatika a literatúra druhého živého jazyka. Pôvodný návrh počítal s ústnou maturitnou skúškou zo všetkých predmetov, čo sa však v praxi neosvedčilo. Postupne sa zrušila skúška z biológie, filozofickej propedeutiky a náboženstva. [3]

Od roku **1860** bola vyučovacím jazykom maďarčina. Slovenčina a nemčina sa používali ako jazyky pomocné. Začala sa maďarizácia v školstve. V roku **1861** Memorandum národa slovenského vyjadrilo nespokojnosť Slovákov s poriadkami zavedenými v školstve. V roku **1863** bola založená Matica slovenská. Slováci zriadili 3 slovenské gymnáziá v Revúcej, Martine a Kláštore pod Znievom, ktoré neskôr zanikli. V roku **1867** bolo Rakúsko-maďarské vyrovnanie. Slováci sa dostali pod nadvládu maďarských vládnucich tried, ktoré sa usilovali o vytvorenie národnostne jednotného maďarského štátu, zrušili slovenské gymnázia. Slovenčina bola vytlačená z vyšších škôl, počínajúc meštianskymi. Do rozpadu Rakúsko-uhorskej monarchie slovenské školstvo prakticky neexistovalo.

Od roku **1867** bol Model 6 + 9, v ktorom písomnú skúšku tvorila maďarčina, preklad z latinčiny, preklad z gréčtiny, preklad do latinčiny, práca z matematiky, nemčina; ústnu skúšku tvorila maďarčina, latinčina a literatúra, gréčtina a literatúra, dejepis a zemepis, matematika, prírodné vedy, fyzika, nemčina, filozofická propedeutika.

V roku **1908** nastala Marchetova reforma. Zjednodušila a zrovnoprávnila sa maturita, ktorá hodnotila mieru vzdelania získaného na strednej škole. Zredukovala sa písomná aj ústna maturita. Písomná maturita z matematiky bola zrušená. Po vzniku 1. ČSR sa pomery v slovenskom školstve zlepšili. [1] Na Slovensku bolo len 300 slovenských učiteľov pre ľudové školy a 20 stredoškolských profesorov Slovákov, preto predstavitelia štátnej moci na Slovensku požiadali o pomoc českých učiteľov a profesorov. Vyučovalo sa po slovensky, budovala sa sieť škôl, mládež mohla získať základné, stredné odborné a učňovské vzdelanie. Malý školský zákon (**1922**) upravil školstvo v celej republike.

Od roku **1922** bol Model 6 + 5, v ktorom písomnú skúšku tvorila slovenčina, preklad z latinčiny, preklad z gréčtiny, preklad do latinčiny, práca z matematiky, nemčina; ústnu skúšku tvoril slovenský jazyk, latinský jazyk a literatúra, gréčtina a literatúra, vlastiveda, matematika.

V roku **1931** nastala reforma maturít. Žiak si sám volil okruh skúšaných predmetov v ústnej časti maturity. Zaviedlo sa 6-denné voľno pred maturitou. Začal platiť Model 4 + 4, v ktorom písomnú skúšku tvorila slovenčina, preklad z latinčiny, preklad z gréčtiny, nemčina; ústnu skúšku tvoril vyučovací jazyk/vlastiveda, latinský jazyk/matematika, gréčtina/nemčina, voliteľným predmetom bola matematika, fyzika, biológia. Po vzniku Slovenského štátu sa realizovala iba ústna maturita z 5 predmetov: vyučovací jazyk, nemčina, vlastiveda, latinčina/matematika; fyzika, prírodopis/chémia.

Od roku **1946** bol Model 3 + 4, v ktorom písomnú skúšku tvoril vyučovací jazyk, preklad z latinčiny, preklad z gréčtiny; ústnu skúšku tvoril vyučovací jazyk, vlastiveda, latinčina/gréčtina, voliteľným predmetom bola matematika, fyzika, biológia. Od roku **1949** bol Model 3 + 5, v ktorom písomnú skúšku tvoril vyučovací jazyk, preklad z latinčiny, preklad z ruštiny; ústnu skúšku tvoril vyučovací jazyk, ruština, spoločenské náuky, latinčina, voliteľným predmetom bola matematika, fyzika, biológia, chémia. Od roku **1951** bol Model 3 + 4, v ktorom písomnú skúšku tvoril vyučovací jazyk (diktát a slohová práca), latinčina, ruština; ústnu skúšku tvoril vyučovací jazyk, ruština, latinčina, voliteľným predmetom bola matematika, fyzika, biológia, chémia; rozhovor o ďalšej práci absolventa. Latinčinu o rok neskôr vystriedala matematika. [3]

Od roku **1964** bol Model 2 + 4, v ktorom písomnú skúšku tvoril vyučovací jazyk, ruština; ústnu skúšku tvoril vyučovací jazyk, ruština, matematika, voliteľný predmet. Prvýkrát bolo možné maturovať z angličtiny. Od roku **1966** bol Model 2 + 4, v ktorom písomnú skúšku tvoril vyučovací jazyk, ruština (bolo možné ju nahradiť aj iným jazykom); ústnu skúšku tvoril vyučovací jazyk, ruština, matematika, voliteľný predmet. Od roku **1968** bol Model 2 (3) + 4, v ktorom písomnú skúšku tvoril vyučovací jazyk, cudzí jazyk/matematika, voliteľný predmet bol ďalší živý jazyk; ústnu skúšku tvoril vyučovací jazyk, voliteľný cudzí jazyk, matematika/dejepis, voliteľný predmet. [8]

Od roku **1971** bol Model 2 (3) + 4, v ktorom písomnú skúšku tvoril vyučovací jazyk, ruština/matematika, voliteľný predmet bol ďalší živý jazyk; ústnu skúšku tvoril vyučovací jazyk, ruština, matematika/dejepis, voliteľný predmet.

Od roku **1981** bol Model 3 (4) + 4, v ktorom písomnú skúšku tvoril vyučovací jazyk, ruština, matematika (na gymnáziách zameraných na matematiku a fyziku), voliteľný predmet bol ďalší živý jazyk; ústnu skúšku tvoril vyučovací jazyk, ruština, matematika/dejepis, voliteľný predmet. Od roku **1987** sa povinne maturovalo zo slovenského a ruského jazyka a matematiky. [4] V roku **1990** sa povinne maturovalo zo slovenského a cudzieho jazyka, matematiky ústnou formou. Z matematiky sa maturovalo iba vtedy, ak sa vyžadovala na ďalšie štúdium, povinne sa maturovalo len na školách so zameraním na matematiku. [5] Od roku **1991** sa povinne maturovalo zo slovenčiny, cudzieho jazyka alebo matematiky

a dvoch voliteľných predmetov. [6] Od roku **2004** sa povinne maturovalo zo slovenského a cudzieho jazyka a dvoch voliteľných predmetov. [7] Existovali úrovne A, B, C (v matematike EČ, PFIČ – do roku **2007**), od roku **2009** existuje len 1 úroveň maturity z matematiky. **V súčasnosti** maturita z matematiky obsahovo vychádza z Cieľových požiadaviek, ktoré sú nad rámec ŠVP. Externú časť maturity z matematiky tvorí test s 30 položkami (20 otvorených, 10 uzavretých). Ústna forma internej časti pozostáva z losovaného maturitného zadania (tri úlohy). Existujú snahy o zavedenie povinnej maturity z matematiky od roku **2025**.

Literatúra

[1] DOBROCKÁ, S. 2016. Prekonávanie rozdielov systému slovenského a českého školstva v medzivojnovom Československu. In Pedagogika, roč. 66, č. 3, 2016, s. 330–343. Dostupné na https://pages.pedf.cuni.cz/pedagogika/?p=11500&lang=cs

[2] HRUBÝ, D. 2015. Historie maturity a postavení matematiky v ní. Praha: LXV. Akademické fórum, 2015. Dostupné na https://jcmf.cz/sites/default/files/Z-4_AF-LXV_Hruby_Historie_maturity_a_postaveni_matematiky_v_ni1.pdf

[3] MORKES, F.: Historický přehled postavení maturitní zkoušky a analýza jejich funkcí. Praha: ÚIV-CERMAT, 2003 ISBN 80-211-0438-4

[4] Vyhláška č. 38/1987 Ministerstva školstva Slovenskej socialistickej republiky o ukončovaní štúdia na stredných školách a o ukončovaní prípravy v osobitných odborných učilištiach

[5] Vyhláška č. 41/1990 Ministerstva školstva, mládeže a telesnej výchovy Slovenskej socialistickej republiky ktorou sa mení a dopĺňa vyhláška Ministerstva školstva Slovenskej socialistickej republiky č. 38/1987 Zb. o ukončovaní štúdia na stredných školách a o ukončovaní prípravy v osobitných odborných učilištiach

[6] Vyhláška č. 102/1991 Ministerstva školstva, mládeže a športu Slovenskej republiky o ukončovaní štúdia na stredných školách a o ukončovaní prípravy v odborných učilištiach a učilištiach

[7] Vyhláška č. 510/2004 Ministerstva školstva Slovenskej republiky o ukončovaní štúdia na stredných školách a o ukončovaní prípravy v odborných učilištiach, učilištiach a praktických školách

[8] Zákon č. 168/1968 Sb., Zákon o gymnáziích

PaedDr. Monika Reiterová, PaedDr. Lujza Čipková Hamplová, PhD.
Štátny pedagogický ústav
P.O.Box 26
Pluhová 8
SK – 830 00 Bratislava
e-mail: monika.reiterova@statpedu.sk, lujza.hamplova@statpedu.sk

POSTOJE ŽIAKOV K MATEMATIKE

MONIKA REITEROVÁ

ABSTRAKT. *Postoje žiakov k matematike majú vplyv na ich dosahované výsledky. Cieľom príspevku je prezentovať výsledky výskumu, ktorý identifikoval školou ovplyvniteľné faktory vplývajúce na postoje žiakov k matematike.*

Existuje viac dôvodov, ktoré nás viedli k realizácii výskumu. Jednak to boli zistenia iných výskumov, ktoré preukázali prepojenosť výsledkov dosahovaných v matematike s postojmi žiakov k matematike, jednak neuspokojivé výsledky z matematiky dosahované žiakmi v národných aj medzinárodných meraniach. V neposlednom rade to bola snaha prispieť k riešeniu klesajúcej úrovne matematického vzdelávania.

Na celoslovenskom výskume sa zúčastnilo 6 730 žiakov 5. – 9. ročníka základnej školy a príslušných ročníkov osemročného gymnázia. Po vyčistení dát bolo ďalej spracovávaných 6 157 dotazníkov. Reprezentatívnosť pre SR bola preukázaná testom dobrej zhody chí kvadrát. Výskumný súbor je reprezentatívny vzhľadom na pohlavie respondentov, ročník, ktorý respondenti navštevujú, kraj, v ktorom sa nachádza škola respondenta. Výskumný súbor nie je reprezentatívny vzhľadom na vyučovací jazyk, v ktorom sú respondenti vzdelávaní.

Výskumným nástrojom bol dotazník rozdelený do dvoch častí. Prvá časť pozostávala z troch batérií položiek zisťujúcich názory respondentov, z ktorých sme neskôr identifikovali latentné premenné. Druhá časť zaznamenávala pozorované premenné (napr. pohlavie, vzťah matky k matematike).

V súlade s psychometrickými odporúčaniami [1] sme pri spracovávaní štatistický súbor náhodne rozdelili na dve časti – (A) exploračnú časť, s ktorou sa vykonali exploračné štatistické analýzy a (B) validizačnú časť, s ktorou sa vykonali konfirmačné štatistické analýzy. Odborná literatúra dôrazne varuje proti tomu, aby sa s tým istým súborom vykonávali exploračné a vzápätí na základe ich výsledkov konfirmačné analýzy, aj keď je takáto prax rozšírená. Ide o využívanie pravidelností v dátach, ktoré môžu byť náhodné a závislé iba od konkrétneho súboru, takže reliabilita a validita výsledkov sú veľmi sporné. Ak sa však výsledky exploračnej analýzy potvrdia na úplne inom súbore, ich validita je podstatne vyššia.

Následne sme urobili štatistickú analýzu, ktorá pozostávala zo šiestich krokov.

1. Určenie počtu latentných faktorov

Na určenie počtu latentných faktorov sme použili Hornovu paralelnú analýzu [4] so súborom (A) (N = 3 079). Táto určila počet faktorov v každej testovej batérii – v prvej to boli 3 faktory, v druhej tiež 3 faktory a v tretej 2 faktory.

2. Exploračná faktorová analýza

Exploračnú faktorovú analýzu [2] sme robili so súborom (A). Jej cieľom bolo priradiť otázky k jednotlivým faktorom, prípadne vyradiť tie otázky, ktoré mali nedostatočné psychometrické vlastnosti. Obsahovo a významovo sme pomenovali všetky faktory, a to: obľúbenosť matematiky, pozitívny prístup učiteľa, dôležitosť matematiky pre budúcnosť, výsledky v matematike, snaha v predmete matematika, pocity voči matematike, správanie učiteľa,

hlučná atmosféra v triede. Vzhľadom na slabé psychometrické vlastnosti bolo vyradených 5 položiek (z 31).

3. Overenie vnútornej konzistencie (reliability)

Najpoužívanejším indexom internej konzistencie (reliability) je Cronbachova alpha. Tento index má však niektoré zásadné nedostatky – má tendenciu byť automaticky vyšší pri vyššom počte položiek bez ohľadu na ich vnútornú konzistenciu; nijako nezohľadňuje dimenzionalitu (počet faktorov) v dátach – napriek rozšírenej mienke jeho vysoké hodnoty neznamenajú, že položky tvoria jeden faktor / dimenziu; ale najzávažnejším nedostatkom je, že predpokladá takzvanú tau-ekvivalenciu: teda to, že každá položka prispieva k vnútornej konzistencii približne rovnako. V štatistickom jazyku faktorových analýz sa tento predpoklad dá vyjadriť tak, že každá položka má približne rovnaké faktorové sýtenie vzhľadom na faktor. V reálnom svete empirických dát je tento predpoklad však ťažko dosiahnuteľný. Z tohto dôvodu súčasné psychometrické odporúčania [3] nabádajú používať presnejší index vnútornej konzistencie, a tým je McDonaldova omega. Pre každú testovú batériu sme vypočítali Cronbachovu alphu, McDonaldovu omegu, hierarchickú omegu a ECV (explained common variance, spoločný vysvetlený rozptyl). Všetky výpočty potvrdili pôvodné počty faktorov (v (B) súbore sme vynechali vyradené položky).

4. Konfirmačná faktorová analýza

Na (B) súbore (N = 3 078) sme overili konfirmačnou faktorovou analýzou faktorovú štruktúru z exploračných faktorových analýz. Všetky tri modely dosiahli vynikajúcu zhodu s dátami aj v (B) súbore – hodnoty CFI a TLI nad 0,95, RMSEA pod 0,05. Ich faktorové štruktúry boli tým definitívne potvrdené.

5. Testovanie predikčných hypotéz

V ďalšej etape nás zaujímalo, ktoré faktory a premenné a ako ovplyvňujú postoje žiakov k matematike. Použili sme štrukturálne modelovanie [6]. V každom modeli bol závislou premennou vzťah žiaka voči matematike, nezávislými premennými boli jednak latentné faktory určené v predošlých konfirmačných faktorových analýzach (8), jednak pozorované prediktory: postoj matky voči matematike, postoj otca voči matematike, navštevovaný ročník v škole a pohlavie.

Výsledky testovania predikčných hypotéz – výsledky:
- čím je žiakmi matematika obľúbenejšia, tým majú k nej pozitívnejší vzťah,
- žiaci, ktorí považujú svoje výsledky za dobré, majú aj pozitívnejší vzťah k matematike,
- správanie učiteľa, ako aj neprítomnosť hluku majú pozitívny vplyv na postoje žiakov k matematike, a sila týchto vplyvov je stredne veľká,
- čím pozitívnejší je názor žiakov na učiteľa matematiky, tým slabší je ich vzťah k matematike,
- žiaci, ktorí sa viac obávajú, majú lepší vzťah k matematike,
- vzťah matky a vzťah otca k matematike sú štatisticky významnými prediktormi vzťahu žiakov k matematike (o niečo silnejším prediktorom je vzťah matky),
- čím vyšší ročník, tým horší vzťah k matematike, hoci tento prediktor je pomerne slabý,
- vzťah k matematike nie je nijako ovplyvnený pohlavím.

6. Zohľadnenie skupinových efektov

V poslednej etape sme sa snažili zohľadniť vplyv učiteľa – postoje žiakov voči matematike nepredstavujú totiž vzájomne nezávislé odpovede. Žiaci, ktorých matematiku učí ten istý

učiteľ, s vysokou pravdepodobnosťou môžu poskytovať podobné odpovede, takže neplatí predpoklad nezávislosti chýb. Preto sme vypočítali viacúrovňový model [5], v ktorom sme dekomponovali odpovede žiakov na vnútro-skupinové a medzi-skupinové (pričom skupiny sú identifikované na základe toho, že ich učí jeden a ten istý učiteľ). Vypočítali sme hodnoty ICC (vnútro-skupinová korelácia) pre každú premennú, ako aj viacúrovňové štrukturálne modely a porovnali výsledky s predchádzajúcimi štrukturálnymi modelmi.

Výsledky výskumu

Po spresnení na základe viacúrovňových modelov majú všetky prediktory okrem predstáv o dôležitosti matematiky v budúcnosti štatisticky signifikantný vplyv na postoje žiakov k matematike. Z hľadiska vecnej významnosti najdôležitejšími prediktormi sú **obľúbenosť matematiky** žiakmi (či ich baví) a **dosahované výsledky**. Stredne významné sú postoje rodičov k matematike (zvlášť matka a otec), správanie učiteľa a pocity žiakov voči matematike. Ostatné prediktory (pozitívny prístup učiteľa, hlučná atmosféra v triede, ročník, pohlavie) sú z vecného hľadiska zanedbateľné, pretože ich vplyv, napriek štatistickej významnosti, je z hľadiska veľkosti efektu minimálny.

Literatúra

[1] Arlot, S. & Celisse, A. (2010). A survey of cross-validation procedures for model selection. Statistics Surveys, 4, 40-79.

[2] Costello, A. B. & Osborne, J. W. (2005). Best Practices in Exploratory Factor Analysis: Four Recommendations for Getting the Most from Your Analysis. Practical Assessment, Research & Evaluation, 10(7), 1-9.

[3] Dunn, T. J., Baguley, T. & Brunsden, V. (2014). From alpha to omega: A practical solution to the pervasive problem of internal consistency estimation. British Journal of Psychology, 105/3, 399–412.

[4] Hayton, J. C., Allen, D. G. & Scarpello, V. (2004). Factor Retention Decisions in Exploratory Factor Analysis: A Tutorial on Parallel Analysis. Organizational Research Methods, 7(2), 191-205.

[5] O'Connell, A. A. & McCoach, D. B. (Eds.) 2008. Multilevel Modeling of Educational Data. Charlotte: IAP.

[6] Urbánek, T. (2000). Strukturální modelování v psychologii. Brno: Psychologický ústav AV ČR.

PaedDr. Monika Reiterová
Štátny pedagogický ústav
Pluhová 8
SK – 830 00 Bratislava
e-mail: monika.reiterova@statpedu.sk

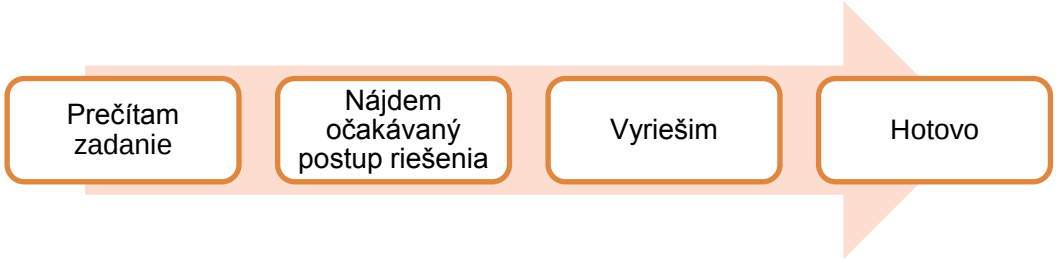
LEN VÝPOČET NESTAČÍ

MÁRIA SLAVÍČKOVÁ

ABSTRAKT. *Pri vyučovaní matematiky je žiadúce viesť žiakov k argumentácii. V príspevku preto uvedieme niekoľko úloh, kde nestačí len povedať výsledok, ale je dôležité vedieť vyargumentovať jeho správnosť.*

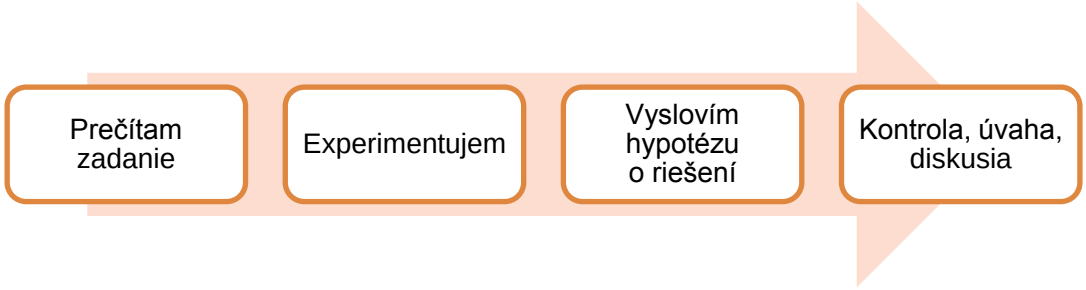
Na úvod

Myslím, že každý učiteľ sa niekoľkokrát počas svojej kariéry stretol s otázkami „Vyšlo to 17?“, alebo „pán učiteľ, mám to dobre?“, a úplne najobľúbenejšia „také sme sa predsa neučili, ako to mám vedieť?“ Pozrime sa bližšie, prečo takéto otázky vôbec vznikajú. Faktorov môže byť viacero (sú tak naučení z domu, z nižšieho stupňa, skúšajú našu trpezlivosť, a pod.), v zásade je však chyba na našej strane, lebo ich k takému správaniu vedieme. Ich proces fungovania je znázornený na obrázku 1.



Obrázok 1: Schéma prístupu k riešeniu úloh

V tomto prípade je za výsledok a úspešnosť riešenia zodpovedný učiteľ. My by sme však chceli, aby tým zodpovedným za to, čo vie alebo nevie bol žiak samotný. Spôsobov, ako ho viesť k zodpovednosti je mnoho, nie všetky sú aplikovateľné do vzdelávacieho procesu. Ako by mala schéma fungovania vyzerať? Aby bolo ťažisko na aktivite žiaka, tak by to mohlo byť ako je znázornené na obrázku 2.



Obrázok 2:Schéma, ako by to malo fungovať

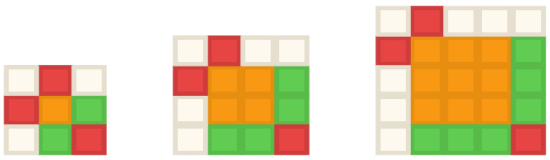
A prečo im vlastne nechceme odpovedať, či je výsledok správny? Odpoviem protiotázkou: Kedy Vám v živote niekto povedal, že práve urobené rozhodnutie bolo správne? Že tento džús je výhodnejší ako ten od konkurencie? Že toto auto treba kúpiť? Presne tak, sami ste si to odôvodnili. Škola má pripraviť žiaka na život a matematika mu

v tejto príprave vie pomôcť práve tým, že nebudeme žiakom hneď poskytovať tabuľku správnych výsledkov, zoznam overených postupov a pod.

Preto si predstavíme niekoľko úloh (a ich možné modifikácie), ktoré sa dajú implementovať do vyučovacieho procesu a majú potenciál primäť žiakov k argumentácii, prečo dané riešenie je, alebo nie je správne (bez odkazu na autoritu). Pri každej úlohe (najmä ak ste neboli na príspevku počas konferencie) Vám odporúčam si problém najskôr skúsiť vyriešiť predtým, ako začnete čítať možné riešenie.

Aktivita 1: Počet farebných štvorcov

Zadanie: Koľko farebných štvorčekov bude obsahovať 50-ty člen postupnosti obrázkov? Tri členy postupnosti sú zobrazené nižšie.(Úloha prebraná z [1])



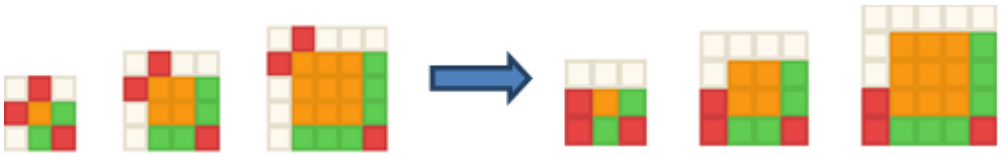
Obrázok 3:Tri po sebe idúce členy postupnosti (prebrané z [1])

Riešenie: Pred samotným riešením vzniká otázka – ktoré farebné štvorčeky? Aj biela je farba? Podľa odpovedí bude vyzerať aj Vaše riešenie. Rôzne farby sú v tomto prípade výhodou pri počítaní, ktorú môžeme využiť.

Tabuľka 1: Počty prvkov pre zvolené farby

	1	**2**	**3**	**4**	**...**	**n**
Oranžová	1	4	9	16	...	n^2
Zelená	2	4	6	8	...	2n
Červená	3	3	3	3	...	3

Vieme teda všeobecný vzťah pre *n*. Po dosadení čísla 50 za *n* máme odpoveď na našu otázku. Samozrejme, mohli sme postupovať inak. Napríklad od celého štvorca odpočítať počet bielych štvorčekov, alebo preusporiadanie štvorčekov a následný výpočet (či už odčítaním počtu bielych od celku, alebo postupne počítanie nie farieb, ale vzniknutých objektov, viď obrázok 4)

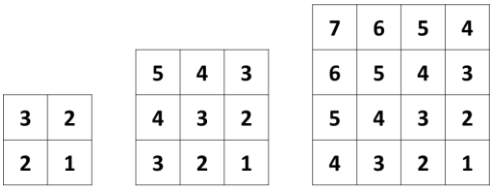


Obrázok 4: Preusporiadanie štvorčekov pre zjednodušenie počítania

Podobných útvarov možno použiť viacero. Môžeme si vymyslieť vlastné modifikácie (napr. rozkreslenie iného kvadratického vzťahu), alebo siahnuť po zaujímavých postupnostiach obrázkov možno nájsť aj nahttp://www.visualpatterns.org/.

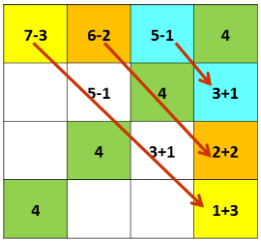
Aktivita 2: Zrná na šachovnici

Zadanie: Ak budeme zrná ukladať na šachovnice rôznych rozmerov podľa obrázku nižšie, koľko ich budeme potrebovať na šachovnicu s rozmermi 100 x 100? (úloha inšpirovaná [2])



Obrázok 5: Ukladanie zŕn na šachovnicu

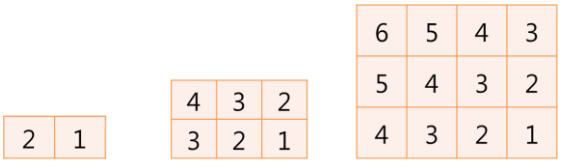
Riešenie: Možno ste skúsili súčet aritmetických postupností, možno tabuľku hodnôt a odhad výsledku, pokus omyl. My si ukážeme, prečo je výsledok tretia mocnina čísla 100. A ukážeme to bez slov. Prosím, pozrite si obrázok 6:



Obrázok 6:Argument, prečo je výsledok v danom tvare

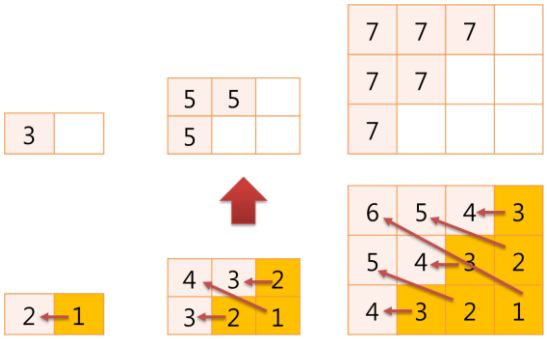
Ako vidíme, presúvaním získame útvar, v ktorom sa nám oveľa ľahšie počíta. Môžeme urobiť jednoduchú modifikáciu, napr. ukladáme vždy párne čísla, alebo nepárne (skúste si to). To nám veľa nového neprinesie, preto si to teraz mierne skomplikujeme a budeme ukladať zrná na šachovnicu obdĺžnikového tvaru.

Modifikácia zadania: Na políčka obdĺžnikovej šachovnice budeme ukladať čísla tak, ako je znázornené na obrázku nižšie. Koľko zŕn potrebujeme na šachovnicu s rozmermi 99 x 100?



Obrázok 7: ukladanie na obdĺžnikovú šachovnicu

Riešenie: Opäť je viacero prístupov a ak ste si skúšali riešiť predchádzajúce úlohy, je jasné, že treba niečo poprekladať. My sme prekladali nasledovne:



Obrázok 8: Presúvanie hodnôt (preklápanie)

Z toho je výsledok jasný. Počet políčok, ktoré nám preložením ostanú tvoria *n*-té trojuholníkové číslo (venovali sme sa figurálnym číslam v príspevku v roku 2018, viď [3]) a hodnota na každom políčku je rovná (*n+1*)-mu nepárnemu číslu. Ako by sme overili, že je to pravda?

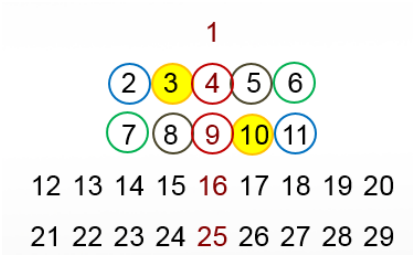
Aktivita 3: Číselná pyramída

Zadanie: Majme číselnú pyramídu obsahujúcu prirodzené čísla a na osi súmernosti štvorcové čísla (viď obrázok 9). Určte hodnotu súčtu čísel v ľavom hornom a pravom dolnom rohu100-ho poschodia. (inšpirované [2])

1
2 3 4 5 6
7 8 9 10 11
12 13 14 15 16 17 18 19 20
21 22 23 24 25 26 27 28 29

Obrázok 9: Číselná pyramída

Riešenie: Ako asi vyzerá to povestné sté poschodie? Potrebujeme to naozaj vedieť? Skúsme preskúmať tie, ktoré už máme.



Obrázok 10: Súčty rovnako zvýraznených dvojíc

Súčet prvkov v požadovaných rohoch je rovný súčtu prvkov na osi súmernosti. To je jednoduchší prípad. Ako zistíme, čo za hodnoty sú na osi súmernosti? Nebude sa pyramída kaziť o kúsok nižšie? My sme si pozreli druhé poschodie (na prvom poschodí je len číslo 1).Má tretie poschodie tiež len dva riadky? A čo ostatné poschodia?

Keď sme si už vyargumentovali, prečo každé poschodie okrem prvého obsahuje dva riadky a prečo platí pre všetky zvýraznené súčty že sú rovnaké, potom nám neostáva len prísť na to, aké prvky sa nachádzajú na stom poschodí na osi súmernosti.

Tabuľka 2: Odpozorované hodnoty z číselnej pyramídy

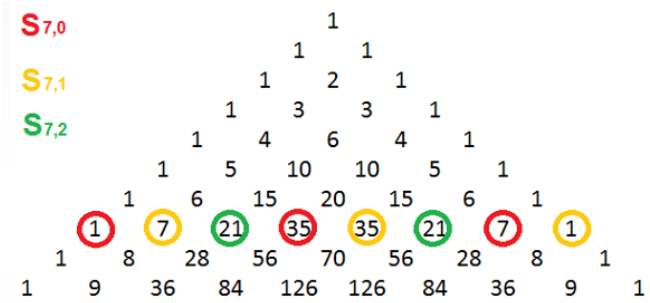
n	**1**	**2**	**3**	**4**
s_n	1^2	2^2+3^2	4^2+5^2	6^2+7^2

Tabuľka 2, kde *n* predstavuje číslo poschodia a s_n súčet požadovaných prvkov, nám pomôže pri určovaní hodnôt na stom poschodí.

Aktivita 4: Pascalov trojuholník pre pokročilých

Zadanie: Nech $S_{n,0}, S_{n,1}, S_{n,2}$ označujú súčty, ktoré dostaneme tak, že sčítame každý tretí prvok v *n*-tom riadku Pascalovho trojuholníka (začíname prvým, druhým, resp. tretím prvkom zľava). Vyslovte hypotézu o hodnote čísla $S_{100,1}$. (prebrané z [4])

Riešenie: Pre vyriešenie úlohy je kľúčový nielen dobrý obrázok vysvetľujúci jednotlivé súčty (viď obrázok 11), ale aj vhodný spôsob narábania s údajmi.



Obrázok 11: Znázornenie prvkov, ktoré sa budú sčítavať v jednotlivých súčtov v siedmom riadku

Pozrime sa bližšie, ako sa tieto súčty tvária pre jednotlivé riadky počítajúc nultým a skúsme odpozorovať nejakú zákonitosť.

n	$S_{n,0}$	$S_{n,1}$	$S_{n,2}$
0	1	-	-
1	1	1	-
2	1	2	1
3	2	3	3
4	5	5	6
5	11	10	11
6	22	21	21
7	43	43	42
8	85	86	85

n	$S_{n,0}$	$S_{n,1}$	$S_{n,2}$
0	1	-	-
1	1	1	-
2	1	1**+1**	1
3	3**-1**	3	3
4	5	5	5**+1**
5	11	11**-1**	11
6	21**+1**	21	21
7	43	43	43**-1**
8	85	85**+1**	85

Obrázok 12: Súčty prvkov po ôsmy riadok Pascalovho trojuholníka

Ako vidíme z obrázku 12, zmeny o plus-mínus jednotku sa nám striedajú. V akom tvare bude stý riadok? A prečo práve v takom? Je niečo, čo ešte môžeme využiť?

Z predchádzajúcich úvah a znalostí o Pascalovom trojuholníku máme nasledujúce rovnice:

$$S_{100,0} + S_{100,1} + S_{100,2} = 2^{100}$$
$$S_{100,0} = S_{100,1}$$
$$S_{100,2} - 1 = S_{100,0} = S_{100,1}$$

A preto súčet hľadaný súčet platí: $S_{100,1} = \frac{2^{100} - 1}{3}$.

Záver

Ako sme videli, úloh s tvorivým kontextom vedúcim k experimentovaniu a rôznorodosti riešení je veľa. Stačí po nich siahnuť a zmeniť hodiny matematiky na priestor pre

experimentovanie, objavovanie a matematické argumentovanie. Preto sa netreba báť chyby, experimentovania a prvotných neúspechov. Učiteľ nie je ani Google ani sudca, aby poskytoval odpovede alebo rozhodoval o správnosti. Naším poslaním by malo byť viesť jedinca k samostatnosti v uvažovaní, rozhodovaní a prijatí zodpovednosti za riešenia.

Literatúra

[1] Kuštorová, K.: *Aktivity podporujúce rozvoj algebraického myslenia.* Bakalárska práca. Bratislava, 2019

[2] Kopka, J.: *Výzkumní přístup při výuce matematiky.* Acta Universitatis Purkynianae 101. Studia Mathematica. Ústí nad Labem, 2004, ISBN 80-7044-604-8

[3] Slavíčková, M., Vargová, M.: *Vybrané metódy riešenia matematických úloh*, Zborník príspevkov z konferencie Dva dni z didaktikou matematiky 2018. Bratislava, 2018, ISBN 978 – 80 – 8147 – 087 – 5

[4] Larson, L.C: *Metódy riešenia matematických problémov.* Alfa Bratislava, 1983. ISBN 80-05-00627-6

PaedDr.. Mária Slavíčková, PhD.
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Univerzita Komenského v Bratislave
Mlynská dolina
SK – 842 48Bratislava
e-mail: slavickova@fmph.uniba.sk

MATEMATICKÉ EDITORY PRE ŽIAKOV SO ŠPECIÁLNYMI VÝCHOVNO-VZDELÁVACÍMI POTREBAMI

MÁRIA STANKOVIČOVÁ

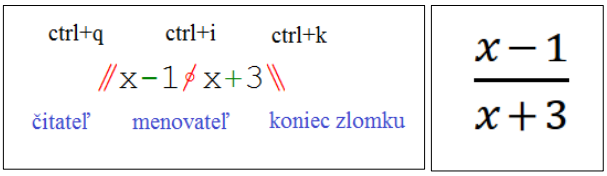
ABSTRAKT. *V príspevku predstavíme matematické editory vhodné pre žiakov s rôznym typom zdravotného znevýhodnenia (zrakové postihnutie, postihnutie jemnej motoriky, poruchy učenia). Matematický editor môže plnohodnotne nahradiť zošit alebo papier na písomku práve v prípadoch, keď žiak z dôvodu zdravotného znevýhodnenia nemôže použiť pero a papier.*

Úvod alebo keď sa pero a papier nedá použiť

Používanie matematického editora možno nie je bežnou praxou na vyučovacích hodinách, no pre žiakov so špecifickými potrebami je veľmi efektívne. Pri výbere editora je potrebné zohľadniť spôsob vytvárania zápisu a možnosť opätovnej editácie. Predstavujeme editory, ktoré sme vybrali na základe skúseností konkrétnych žiakov a učiteľov, s ktorými spolupracujeme [1].

Žiaci so zrakovým postihnutím

Pre **nevidiacich** žiakov je vhodný matematický editor **Lambda**[10], ktorý spolupracuje s čítačom obrazovky[11] a používa správnu matematickú terminológiu [2]. Žiaci vkladajú jednotlivé časti matematického zápisu pomocou klávesových skratiek, pričom je dôležité, aby dodržiavali správne poradie jednotlivých znakov. Tým zabezpečia korektnú interpretáciu čítačom obrazovky a vizualizáciu vo webovom prehliadači (obrázok 1).



Obrázok 1: vľavo: klávesové skratky a ich interpretácia čítačom obrazovky v editore LAMBDA; vpravo: vizualizácia zápisu vo webovom prehliadači Mozilla Firefox

Editor Lambda ponúka žiakom niekoľko zaujímavých obslužných príkazov [3], ktoré sa v iných matematických editoroch nevyskytujú:

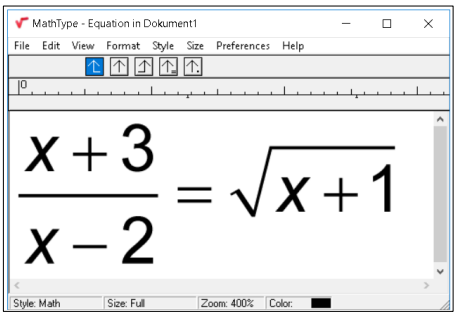
- kopírovanie aktuálneho riadka (vhodné pri sledovaní krokov výpočtu),
- zobrazenie rozvinutej a kompaktnej štruktúry (užitočné pri zložených zlomkoch, vnorených zátvorkách a podobne...),
- kalkulačka a vloženie výsledku na pozíciu kurzora,
- viacnásobná pamäťová schránka (praktické pri počítaní s medzivýsledkami alebo pre zapamätanie často používaných vzorcov),

[10] https://www.veia.it/en/lambda_product

[11] Čítač obrazovky – softvér, ktorý cez hlasový výstup poskytuje textové informácie zobrazené na obrazovke počítača (názvy programov, text v dokumentoch a podobne ...)

- inverzia zlomku.

Pre **slabozrakých** žiakov sú zaujímavé editory typu WYSIWYG[12]. Na základe našich skúseností považujeme za vhodný editor **MathType**[13]. Po inštalácii sa do programov balíka MS Office automaticky pridá pás nástrojov MathType. Výberom v ikonovom menu alebo klávesovými skratkami je možné do dokumentu vkladať matematický zápis. Práve možnosť používať klávesové skratky je pre slabozrakých žiakov veľmi efektívna. Zväčšovací program[14] ukáže len časť obrazovky a pre žiakov je dôležité sústrediť sa na to, čo píšu. Časté hľadanie myšou v rozsiahlej ponuke tlačidiel je časovo náročné a žiakom rozptyľuje pozornosť. Žiaci sa vedia rýchlo naučiť klávesové skratky a prakticky vôbec nemusia pohnúť kurzorom mimo zápisu. Veľkou výhodou je aj možnosť nastaviť font a veľkosť písma individuálne podľa potrieb každého žiaka (obrázok 2).



Obrázok 2: zápis v editore MathType

Žiaci s telesným postihnutím

Žiakom **s poruchou jemnej motoriky** môže časté presúvanie myši a klikanie tlačidiel spôsobovať problémy. U niektorých žiakov nie je vhodné ani používanie klávesových skratiek, najmä ak je potrebná kombinácia 3 kláves, prípadne sú klávesy „ďaleko“ od seba. Požiadavky jednoduchého vkladania zápisu a intuitívneho ovládania spĺňa voľne dostupný **Infty Editor**[15]. Základné štruktúry ako zlomok a odmocnina zapisujú žiaci stlačením niektorého funkčného klávesu (F5 až F9). Indexy a exponenty zapisujú žiaci použitím šípok hore a dole. Špeciálne znaky ako napríklad nerovná sa, nekonečno, grécke písmená a iné žiak vyberá z ponuky, ktorá sa zobrazí po stlačení opačnej lomky **** (na slovenskej klávesnici AltGr+q). Názvy špeciálnych znakov sú odvodené z TeXu (obrázok 3). V *Pomocníkovi* editora je uvedený kompletný zoznam znakov s ich názvami.

Celé prostredie editora sa dá ovládať z klávesnice. Pre žiakov, ktorým postihnutie rúk znemožňuje stlačiť dva klávesy súčasne, je potrebné nastaviť funkciu *Jedným prstom* v nastaveniach pre zjednodušenie ovládania, ktoré sú súčasťou operačného systému.

---

[12] WYSIWYG – akronym pre „What You See Is What You Get“ – používateľ priamo vidí výsledok svojej úpravy v editore

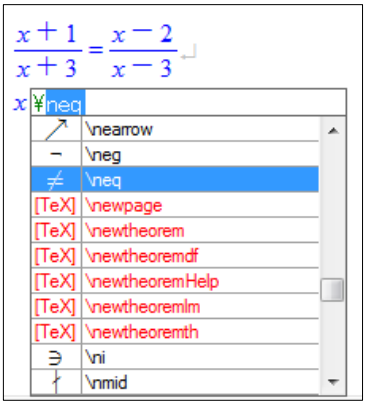
[13] https://www.dessci.com/en/products/mathtype/

[14] Zväčšovací program – softvér, ktorý umožňuje upraviť farebnú schému a veľkosť písma na obrazovke počítača

[15] http://www.inftyproject.org/en/software.html#InftyEditor

Výsledný dokument môžete exportovať do formátu XML, ktorý sa dá otvoriť v programe MS Word.

Učiteľ môže využiť editory MathType a LAMBDA na prípravu previerkových zadaní a študijných materiálov nielen pre žiakov so zrakovým postihnutím, ale aj pre intaktných spolužiakov. Dokumenty môže vytlačiť alebo dať žiakom k dispozícii v elektronickej forme. Jediná „práca navyše“ je naučiť sa používať editory, čo je v konečnom dôsledku pridaná hodnota.



Obrázok 3: kontextová ponuka v programe Infty Editor

Žiaci s poruchami učenia

Jednoducho dostupným editorom pre žiakov s poruchami učenia je editor rovníc v programe MS Word. Má prehľadné ikonové menu, v ktorom si žiaci môžu vybrať z vopred pripravených zápisov (zlomok, odmocnina, ...) a následne na vyznačené políčka vkladajú čísla alebo premenné podľa potreby. Okrem toho si môžu vybrať aj jednotlivé znaky ako napríklad nekonečno, nerovná sa a podobne. Zápis žiakov je prehľadný a čitateľný, čiže „neutekajú riadky“ a „nepletú“ sa písmenká a čísla. Učiteľ môže zvážiť aj používanie uvedených editorov (MathType a Infty Editor).

Literatúra

[1] Stankovičová, M., Mendelová, E.: *Matematika bez bariér*. In: Dva dni s didaktikou matematiky 2018, Zborník príspevkov 1. vyd. Bratislava : Fakulta matematiky, fyziky a informatiky UK, 2018 S. 93-98, ISBN 978-80-8147-087-5, https://www.ddm.fmph.uniba.sk/files/DvaDni/Zbornik2018.pdf

[2] Kaliaková, M., Stankovičová, M., Vitálišová, Z.: *Informatické kompetencie žiakov ZŠ so zrakovým postihnutím a ich využitie na vyučovaní matematiky a fyziky používaním matematického editora LAMBDA*, In: DidInfo 2015, Banská Bystrica : Univerzita Mateja Bela, 2015, S. 144-149, ISBN 978-80-557-0852-2, http://www.didinfo.net/images/DidInfo/files/didinfo_2015.pdf

[3] Stankovičová, M.: *Matematický text, učebný text pre nevidiacich žiakov 2. stupňa ZŠ*, Bratislava, FMFI KZVI UK, 2017, http://vin.edi.fmph.uniba.sk/Matematika_Ucebnica/Matematika_Ucebnica.pdf

Mgr. Mária Stankovičová
Univerzita Komenského v Bratislave
Centrum podpory študentov so špecifickými potrebami,
Šafárikovo námestie 6, 814 99 Bratislava
tel.: 02/602 95 515, 02/602 95 166
e-mail: maria.stankovicova@rec.uniba.sk

FINANČNÁ GRAMOTNOSŤ NA SLOVENSKÝCH ŠKOLÁCH

PETER TÓTH

ABSTRAKT.*V roku 2008 Ministerstvo školstva SR a Ministerstvo financií SR predstavili „Národný štandard finančnej gramotnosti". Ako to ale po 11 rokoch naozaj vyzerá s jeho aplikáciou na všetkých stupňoch vzdelávania na slovenských školách.*

Prečo sa finančnej gramotnosti nevenuje potrebná pozornosť?

Vláda SR uznesením z 2. júla 2008 schválila „Návrh stratégie vzdelávania vo finančnej oblasti a manažmentu osobných financií". Ministerstvo školstva SR a Ministerstvo financií SR predstavili 30. októbra 2008 „Národný štandard finančnej gramotnosti - 1.verziu". Odvtedy uplynulo jedenásť rokov a Ministerstvá spolu vydali už tretiu vylepšenú verziu Národného štandardu finančnej gramotnosti. Ako to ale po jedenástich rokoch naozaj vyzerá s jeho aplikáciou na všetkých stupňoch vzdelávania na slovenských školách?

Súčasný stav finančnej gramotnosti na slovenských školách

Vedia si žiaci, študenti a absolventi našich škôl riadiť vlastné financie-vedia čo najoptimálnejšie a najzodpovednejšie manažovať financie (plánovať, sporiť, investovať, ...)? Poznajú hodnotu peňazí (otázky typu „Je 10 eur za toto veľa alebo nie")? Vedia čo najvýhodnejšie nakupovať, vedia si správne vybrať najvhodnejšieho operátora telekomunikačných služieb alebo dodávateľa elektriny a plynu do domácnosti? Ak brigádujú alebo pracujú, vedia prečo dostanú menej ako majú dohodnutú mzdu? Vedia čo sú to dane a odvody do sociálnej a zdravotnej poisťovne a akú protihodnotu za ne dostanú? Vedia si vybrať z veľkej ponuky bánk, v ktorej si otvoria účet s platobnou kartou, kedy a za akých podmienok môžu dostať hypotéku alebo kedy a prečo je dobré uzavrieť poistku?

Prepojenie „finančných znalostí" s ich potrebou v reálnom živote

Dôvody, prečo aj po jedenástich rokoch pozorujeme v tejto oblasti iba malý posun sú:

- existencia len ojedinelých projektov s malým dosahom (napríklad projekt Viac ako peniaze, Finančná akadémia alebo Finančná olympiáda Nadácie Partners a podobne),
- slabá úroveň finančnej gramotnosti súčasných učiteľov na všetkých typoch škôl,
- nereagovanie vysokých škôl a ich fakúlt vzdelávajúcich budúcich učiteľov na takýto druh vzdelávania,
- minimum voľne dostupných použiteľných materiálov a metodík k výučbe základov finančnej gramotnosti.

Prečo je teda „finančné“ vzdelávanie nevyhnutné a na všetkých typoch škôl potrebné a zároveň motivujúce žiakov a študentov:

- pretože prichádza k prepojeniu finančných znalostí, postojov a zodpovednosti s ich potrebou v reálnom živote,
- aktraktívnosťou tém a úloh pre žiakov, zapojením aj pasívnych alebo menej aktívnych žiakov,
- väčším a rôznorodejším záberom, kde si každý môže nájsť to svoje v čom môže byť lepší ako iní (napr. niekoho viac zaujíma história obchodovania a platidiel, iného ekológia a šetrenie v domácnosti, nové digitálne trendy, investovanie, ...), čiže budovaním pozitívnej motivácie,
- pri vyučovaní alebo zaoberaní sa týmito témami nehrozia učiteľovi nekonečné otázky žiakov a študentov typu „A načo mi to bude?“ alebo „Kedy a kde toto v budúcnosti využijem?“.

Literatúra

[1] Mgr. Peter Tóth, PhD., RNDr. Monika Dillingerová, PhD.: Financie v praxi, Pracovná učebnica, časť A, Bratislava, vydavateľstvo ABCedu, 2019, ISBN 978-80-973319-6-2

[2] Mgr. Peter Tóth, PhD., RNDr. Monika Dillingerová, PhD.: Financie v praxi, Riešenia a komentáre, časť A, Bratislava, vydavateľstvo ABCedu, 2019, ISBN 978-80-973319-8-6

[3] Prof. Ing. Peter Plavčan, CSc.: Národný štandard finančnej gramotnosti, verzia 1.2, Bratislava, MŠVVŠ SR, 2017

Mgr. Peter Tóth, PhD.
Základná škola
Žitavská 1
SK – 821 07 Bratislava
e-mail: toth.pietro@gmail.com

AKO UČIŤ MATEMATIKU ZAUJÍMAVO

VIERA UHERČÍKOVÁ, PETER VANKÚŠ

ABSTRAKT. *Keďže sú učitelia zaťažovaní množstvom rôznych administratívnych a ďalších povinností, rozhodli sme sa pomôcť im vo vyhľadávaní osvedčených motivačných metód vyučovania matematiky, aby ich mohli aplikovať vo svojej pedagogickej praxi. Sme radi, že to môžeme urobiť prostredníctvom akreditovaného programu inovačného kontinuálneho vzdelávania "Aktivizujúce motivačné metódy, formy a prostriedky na rozvíjanie pozitívneho vzťahu žiakov k matematike na ZŠ a SŠ." V rámci nášho článku priblížime obsah tohto vzdelávania.*

Úvod

V rokoch 2013–2018 sme mali na Fakulte matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislave akreditovaný program kontinuálneho vzdelávania „Netradičné metódy vyučovania matematiky so zameraním na motiváciu, tvorivosť a rozšírenie kľúčových kompetencií učiteľov matematiky na ZŠ a SŠ“, realizovaný kombinovanou formou. Absolvovalo ho 59 účastníkov. Bližšie informácie získajú záujemcovia v publikáciách (Uherčíková a Vankúš, 2016, 2017, 2018).

Úspešnosť programu potvrdená dotazníkovým prieskumom nás viedla k tomu, aby sme podali návrh na akreditáciu ďalšieho podobne zameraného, ale inovovaného a rozšíreného programu. Sme radi, že sme dostali rozhodnutie o schválení programu kontinuálneho vzdelávania „Aktivizujúce motivačné metódy, formy a prostriedky na rozvíjanie pozitívneho vzťahu žiakov k matematike na ZŠ a SŠ“. Podľa platnej akreditácie môžeme tento program kontinuálneho vzdelávania realizovať na pôde našej fakulty v rokoch 2019–2024. V nasledujúcej časti článku priblížime formu a obsah tohto vzdelávania.

Forma a obsah vzdelávania

Prezentované vzdelávanie je zameraním inovačné. Celkový rozsah vzdelávania je 60 hodín, z toho časť je realizovaná prezenčnou a časť dištančnou formou. Po úspešnom absolvovaní je možné získať 15 kreditov. Obsahovo je vzdelávania určené pre učiteľov matematiky na druhom stupni ZŠ a SŠ.

Ciele vzdelávania sú nasledovné:

1) Oboznámiť učiteľov s najnovšími motivačnými metódami, formami a prostriedkami vyučovania matematiky.
2) Poskytnúť učiteľom účinné nástroje a prostriedky na rozvoj tvorivosti vo vyučovaní matematiky.
3) Vybaviť učiteľov dostatkom argumentov, aby žiaci získali presvedčenie o význame a dôležitosti matematiky pre spoločnosť.
4) Na základe spätnoväzobných informácií zo strany žiakov poskytnúť učiteľom vhodné prostriedky a metódy na zlepšovanie ich edukačnej činnosti.
5) Oboznámiť učiteľov s edukačnými metódami, ktoré zdôrazňujú individuálny prístup ako prostriedok humanizácie vyučovania matematiky.
6) Poskytnúť učiteľom námety na motiváciu vo vyučovaní matematiky prostredníctvom významných matematických úloh a divergentných úloh z geometrie slúžiacich na rozvoj geometrickej predstavivosti.

7) Sprostredkovať učiteľom formy a metódy práce s didaktickými hrami ako metódou vyučovania matematiky. Konkrétne sa venujeme prezentácii ukážok nových hier použiteľných vo vyučovaní matematiky, ale aj aplikácii známych hier – napr. použitie šachu vo vyučovaní matematiky.
8) Oboznámiť účastníkov vzdelávania s aktuálnymi témami súčasnej pedagogiky v rámci alternatívnych škôl, hlavne s metódou projektového vyučovania matematiky.
9) Poskytnúť účastníkom vzdelávania námety na humanizáciu vyučovania matematiky prostredníctvom popularizačných tém.
10) Poukázať na motivačný, ilustratívny a metodický význam histórie matematiky v matematickej edukácii.
11) Úloha a využitie digitálnych technológií vo vyučovaní matematiky za účelom podpory pozitívneho vzťahu žiakov k matematike a zlepšovania matematickej edukácie.
12) Účastníkom poskytnúť námety na využitie motivačných metód, foriem a prostriedkov, ktoré boli obsahom vzdelávania, za účelom vytvárania podnetného prostredia vo vyučovaní matematiky na ZŠ a SŠ.

Novinkou vzdelávania je možnosť dostať sa k najúspešnejším dizertačným, diplomovým, prípadne bakalárskym prácam poslucháčov a absolventov Fakulty matematiky, fyziky a informatiku Univerzity Komenského v Bratislave. Obsahujú totiž najnovšie poznatky, o ktorých sa učiteľská verejnosť veľakrát ani nedozvie. Takto chceme prispieť v rámci nášho programu kontinuálneho vzdelávania aj k aplikácii študijných výsledkov našich poslucháčov a absolventov do pedagogickej praxe.

V nasledujúcej časti článku predstavíme jednu z foriem vyučovania, prezentovanú v rámci vzdelávania – didaktické hry. Konkrétne priblížime hru „Počet deliteľov“ a analýzu jej stratégia, ktorá je prvkom vhodným na rozvoj strategického a analytického myslenia žiakov.

Počet deliteľov

Uvedená hra je vhodná pre tematický celok Deliteľnosť prirodzených čísel. Edukačné ciele hry sú precvičovanie určovania deliteľnosti prirodzených čísel, spätná väzba pre žiakov o zvládnutí učiva. Hra je vhodná na rozvoj strategického myslenia žiakov, ale tiež na podporu schopnosti žiakov analyzovať dáta a pracovať s nimi. Hru hrajú dvojice žiakov, učiteľ plní organizačnú a kontrolnú úlohu. Žiaci potrebujú k hraniu len prázdny hárok papiera pre každú dvojicu. Čas trvania jednej partie hry je 5–10 minút.

Pravidlá hry: Počas hry žiaci v svojom ťahu odpočítavajú od počiatočného prirodzeného čísla n (napr. $n = 30$) ľubovoľné prirodzené číslo od 1 po 5. Po odpočítaní hráč zistí, koľko prirodzených deliteľov má vzniknuté číslo; počet deliteľov určuje počet bodov, ktoré hráč za svoj ťah získa. Vzniknuté číslo, ako aj počet deliteľov zapisuje hráč kvôli prehľadnosti na hárok papiera. Hráči sa striedajú v ťahu, až kým nedostanú číslo 1. Hráč, ktorý v priebehu hry získa viac bodov, vyhráva. V ďalšej hre si žiaci vymenia poradie, v ktorom začínali.

Záverečné vyhodnotenie: Hráči hrajú viac hier. Najmenší počet je dve, aby sme zaistili, že každý hráč začínal rovnaký počet hier. Dvojica v lavici si zapisuje vzájomné skóre, tento zápis odovzdajú vyučujúcemu. Za každú hru víťaz aj porazený získajú istý počet bodov za aktivitu (napr. tri body pre víťaza, jeden bod pre porazeného).

Prednosti danej hry: Aktívna práca celej triedy, vnútorná motivácia žiakov súťaživosťou. Vzájomná kontrola žiakov odbremeňuje učiteľa.

Prirodzená otázka, ktorá počas hrania našej hry vzniká je, či má hra výhernú stratégiu. Na analýzu situácie je potrebné zostaviť si tabuľku počtu deliteľov všetkých čísel od 1 do 29, pozri tabuľku 1.

Počet deliteľov	Čísla
8	24
6	28, 20, 18, 12
5	16
4	27, 26, 22, 21, 15, 14, 10, 8, 6
3	25, 9, 4
2	29, 23, 19, 17, 13, 11, 7, 5, 3, 2
1	1

Tabuľka 1: Počet deliteľov prirodzených čísel od 1 do 29

Ak teraz zanalyzujeme najvýhodnejšie pozície hry, tak zistíme, že za predpokladu, že hráči ťahajú vždy na najbližšiu najhodnotnejšiu pozíciu, hru vyhrá druhý hráč za skóre 28 : 29. Takáto stratégia je uvedená v tabuľke 2.

Ťah	Počet bodov za daný ťah
1) I. hráč 30 → 28	6 bodov
2) II. hráč 28 → 24	*8 bodov*
3) I. hráč 24 → 20	6 bodov
4) II. hráč 20 → 18	*6 bodov*
5) I. hráč 18 → 16	5 bodov
6) II. hráč 16 → 12	*6 bodov*
7) I. hráč 12 → 10	4 body
8) II. hráč 10 → 8	*4 body*
9) I. hráč 8 → 6	4 body
10) II. hráč 6 → 4	*3 body*
11) I. hráč 4 → 3	2 body
12) II. hráč 3 → 2	*2 body*
13) I. hráč 2 → 1	1 bod

Tabuľka 2: Stratégia ťahov na najbližšiu optimálnu pozíciu

Otázkou ostáva, či nejakou šikovnou voľbou ťahov nemôže prvý hráč dosiahnuť, aby zvíťazil. Skúsme sa zamyslieť, či prvý hráč dokáže druhému hráčovi zabrániť, aby sa dostal

na čísla, ktoré sú uvedené pri ťahoch tohto hráča v tabuľke 2. Bez ohľadu na prvý ťah prvého hráča sa druhý hráč dokáže vždy v ťahu 2) dostať na číslo 24. Tak isto bez ohľadu na postup prvého hráča sa druhý hráč dostane vždy aj na čísla 18 a 12.

Pri ťahu z čísla 12 má prvý hráč možnosť ísť na číslo 8, čím zabráni ťahu 8) druhého hráča. Pre druhého hráča je teraz optimálne ísť na číslo 6. Koniec hry ďalej už bez ohľadu na priebeh vedieť k zisku jedného bodu navyše pre prvého hráča. Následne hra skončí aj tak víťazstvom druhého hráča, napr. za skóre 26 : 27, ako ilustruje tabuľka 3.

Ťah	Počet bodov za daný ťah
1) I. hráč 30 → 28	6 bodov
2) II. hráč 28 → 24	*8 bodov*
3) I. hráč 24 → 20	6 bodov
4) II. hráč 20 → 18	*6 bodov*
5) I. hráč 18 → 16	5 bodov
6) II. hráč 16 → 12	*6 bodov*
7) I. hráč 12 → 8	4 body
8) II. hráč 8 → 6	*4 body*
9) I. hráč 6 → 4	3 body
11) II. hráč 4 → 3	*2 body*
12) I. hráč 3 → 2	2 body
13) II. hráč 2 → 1	*1 bod*

Tabuľka 3: Alternatívna stratégia ťahov

Ako vidíme, uvedená analýza hry je vhodným podkladom na opakovanie učiva súvisiaceho s tematickým celkom zaoberajúcim sa deliteľnosťou prirodzených čísel. Žiaci počas práce musia opätovne narábať s počtom deliteľov jednotlivých čísel, uvedomia si napr. rozloženie prvočísel v danej číselnej množine a pod. Aktivita v neposlednom rade vedie tiež k rozvoju strategického myslenia žiakov. Učí ich aj pracovať s dátami, vhodne si ich zapisovať, hľadať v nich súvislosti a vzory.

Záver

V našom článku sme predstavili inovačné kontinuálne vzdelávania s názvom „Aktivizujúce motivačné metódy, formy a prostriedky na rozvíjanie pozitívneho vzťahu žiakov k matematike na ZŠ a SŠ“. Uvedené kontinuálne vzdelávanie prebieha na Fakulte matematiky, fyziky a informatiku UK v Bratislave v rokoch 2019–2024 a je určené pre všetkých záujemcov z radov učiteľov matematiky druhého stupňa ZŠ a SŠ.

V článku sme tiež predstavili konkrétnu ukážku obsahu vzdelávania, didaktickú hru „Počet deliteľov“. Uviedli sme jej opis a uvažovali sme o jej výhernej stratégii. Takáto aktivita je pre žiakov prínosná jednak z hľadiska tematického celku zaoberajúceho sa deliteľnosťou

prirodzených čísel, ale tiež z hľadiska rozvoja strategického myslenia a podpory schopnosti práce s dátami a ich analýzy.

Ak Vás zaujal obsah a zámery nášho programu kontinuálneho vzdelávania, patričné informácie získate na adrese: www.comae.sk/motivacnemetody.html resp. nás môžete kontaktovať emailom na adrese: motivacne.metody@gmail.com

Tešíme sa na všetkých záujemcov o zaujímavé vyučovanie matematiky. Všetkým učiteľom prajeme veľa úspechov v ich veľmi záslužnej a prínosnej práci.

Literatúra

[1] Uherčíková, V., Vankúš, P.: Motivačné metódy vo vyučovaní matematiky na ZŠ a SŠ, In: Ed. Kohanová, I. *Dva dni s didaktikou matematiky 2016. Zborník príspevkov*, Bratislava, FMFI UK Bratislava, 2016, ISBN 978-80-8147-075-2

[2] Uherčíková, V., Vankúš, P.: Netradičné metódy vyučovania matematiky (kontinuálne vzdelávanie), In: Ed. Dillingerová, M. *Dva dni s didaktikou matematiky 2017. Zborník príspevkov*, Bratislava, FMFI UK Bratislava, 2017, ISBN 978-80-8147-082-0

[3] Uherčíková, V., Vankúš, P.: Motivačné metódy vo vyučovaní matematiky na ZŠ a SŠ, In: Ed. Slavíčková, M. *Dva dni s didaktikou matematiky 2018. Zborník príspevkov*, Bratislava, FMFI UK Bratislava, 2018, ISBN 978-80-8147-087-5

doc. RNDr. Viera Uherčíková, CSc.
FMFI UK Bratislava
Mlynská dolina
SK – 842 48 Bratislava
e-mail: v.uhercikova@gmail.com

PaedDr. Peter Vankúš, PhD.
FMFI UK Bratislava
Mlynská dolina
SK – 842 48 Bratislava
e-mail: peter.vankus@gmail.com

GAMIFIKÁCIA VYUČOVANIA MATEMATIKY NA 2. STUPNI (GAMIFIKÁCIA VYUČOVANIA GEOMETRIE)

LUKÁŠ VÍCEN

ABSTRAKT. *Gamifikácia ako nástroj pre vytváranie a posilňovanie vnútornej motivácie vo vyučovaní (matematiky). Základné prvky oblasti gamifikácie a ich dopad na žiaka a kolektív triedy. Príklad gamifikácie na hodine matematiky počas vyučovania geometrie a formy odmien.*

Čo je to gamifikácia, aké sú jej základné prvky a oblasti?

Gamifikácia je použitie herných prvkov v nehernom prostredí. Herné prvky môžu byť zbieranie bodov, získavanie odmien, porovnávanie sa s ostatnými, postupovanie "na vyšší level", ale aj uplatňovanie hravej tvorivosti. Taktiež existujú ďalšie herné prvky, akými sú úrovne, ukazovateľ progresu, výzvy, sociálna interakcia atď.

Hlavné tri oblasti, na ktoré sa gamifikácia zameriava sú kognitívna, emočná a sociálna.

Pre kognitívnu oblasť platí, že hry vedú hráčov v procese zvládania problému a udržujú ich motivovaných potenciálne ťažšími úlohami (Koster, 2004). Jednou dôležitou technikou pri tvorbe hier je vytvárať konkrétne výzvy alebo ciele, ktoré sú prispôsobené úrovni zručností daného hráča a ich obtiažnosť narastá spolu s tým, ako sa tieto zručnosti rozvíjajú. Študentov motivujú konkrétne, mierne obťažné a bezprostredné ciele a presne takéto ciele dokážu hry nastaviť. V tých najlepšie pripravených hrách je odmenou za vyriešený problém ešte ťažší problém (Gee, 2007).

V rámci emočnej oblasti je dôležitým aspektom v hre je otázka zlyhania či neúspechu. Keďže hry v sebe zahŕňajú opakované experimentovanie, zahŕňajú aj opakovaný neúspech. V skutočnosti v mnohých hrách je opakované zlyhanie jediným spôsobom, ako sa hru naučiť, pričom pri každom zlyhaní človek napreduje (Gee, 2007). V hrách sa darí udržiavať tento pozitívny vzťah ku zlyhaniu tým, že spätná väzba prichádza rýchlo a človek pri zlyhaní veľa nestráca. Chyba taktiež vyzýva k náprave a nie k ľútosti alebo zatrpknutiu na daný problém, ak je dostatočne vyzývavá a neodsudzujúca (Hejný, Novotná, Stehlíková 2004)

Sociálnu oblasť v gamifikácii pokrýva možnosť vyskúšať si nové role a identity a taktiež podporuje, aby rozhodnutia v hre robili z nového uhla pohľadu (Squire, 2006; Gee, 2007). V hre sa študent môže verejne stotožniť aj s rolou vedca/vynálezcu/detektíva. Hra môže poskytnúť sociálne uznanie za dosiahnuté školské úspechy, ktoré by inak zostali neviditeľnými alebo mohli dokonca viesť u ďalších študentov k zosmiešňovaniu.

Príklad gamifikácie na hodine matematiky v geometriia formy odmien

Pri vyučovaní geometrie som sa rozhodol využiť gamifikáciu (inšpirovaný hrou Euclidea) tak, že si postupne odomykáme nové možnosti pri rysovaní, ideálne je si naznačiť na tabuľu stupeň progresu – teda stupnicu ktorá bude ukazovať čo už máme odomknuté a čo nás ešte čaká, či už zvolíme konkrétne príklady (kružidlo, uhlomer) alebo ich pomenujeme len 1. level, 2. level atď. No pri vyzradení odmeny vopred si môžeme skaziť proces odmeňovania.

1. Level spočíva v rôznych bodoch na papieri, kedy máme jedinú úlohy ich spájať pričom používame len ceruzku a ,,rovný,, predmet a vznikajú nám tak úsečky a priamky. Po zdarnej jednoduchej prvej úlohe dostávajú (odomykajú si) žiaci pravítka.
2. Level odomknutie si kružidla – úloha spočíva narysovať čo najpresnejšie kružnicu (množinu bodov rovnako vzdialených od jedného bodu) len pomocou pravítka a ceruzky. Z počiatku nemotorné ,,vybodkovanie,, vedie k uvedomeniu si že kružnica je množina bodov – často diskusia v triede a vzájomne porovnávanie si ,,krajšej kružnici,, vedie skôr k vzájomnému uznanie ako zosmiešňovaniu.
3. Level je tvorba 60° a 90° uhlov, pričom používame len kružidlo, pravítko a ceruzku. Výzvou je tvorba zložených uhlov resp. využívanie osí uhla pre zvládnutie 15°, 45°, 105°,a 135°, na čo si následne žiaci odomykajú uhlomer. (niektorí pokračujú a pri rysovaní volia stále tvorbu uhlov, ak je to možné kružidlom a pravítko so zdôvodnením, že je to presnejšie)
4. Level až X. level nastáva pri zisku všetkých potrebných nástrojov. Zadávame ťažšie úlohy – rysovanie konkrétnych útvarov, využívanie (ne)známych vlastností (pravouhlý rovnoramenný trojuholník, kde poznáme len veľkosť prepony, štvorec kde je zadaná veľkosť uhlopriečky a nie strana, šesťuholník pričom poznáme veľkosť kružnice jemu opísanej/vpísanej).

Forma odmien/odznakov/uznania je variabilná, príklad je zmenšovanie domácej úlohy (čo pri zaujímavej, konštrukčne náročnej domácej úlohy nakoniec nemusí byť použité), deti si často vymýšľajú vlastné tituly napr.: Marek rysujúci ako Archimedes, Euklidov následník Štefan alebo Pytagorejka Anna. Samozrejme tieto tituly si môžeme pripraviť samy, no pri

vyšších ročníkoch môžu byť zneužité často sarkasticky alebo nevhodne. Progres môže byť sledovaný aj pomocou písania storočí, kedy sa jednotlivé dôkazy, axiómy a tvrdenia objavili v histórii. Napríklad: Teraz rysujeme ako Táles zo 6. storočia pred naším letopočtom, počkajte až keď budeme ako Euklides v 4. storočí pred naším letopočtom a tak ďalej. Pomáha to žiakom uvedomiť si pomalý proces kryštalizácie poznatkov a ich zdôvodňovanie naprieč stáročiami.

Samozrejme pri podobných procesoch gamifikácie je nutná dobrovoľnosť a vlastný záujem žiakov v opačnom prípade nemá zmysel. Úvodná časť hodiny je preto vhodná na vtiahnutie do hry krátkym príbehom Ako asi rysovali Gréci, čo mali ľahšie a čo ťažšie ako my a čo to vyskúšať? Niekedy pomáha, aby si žiaci zvolili nové grécke mená (stačia nám písmená gréckej abecedy) a ich odosobnenie sa a vžitie sa s príbehom je ľahšie.

Tak odložme všetko až na uhlík (v našom prípade ceruzka) a začíname, 1. level.

Literatúra

[1] Gee James Paul, *What Video GamesHave to TeachUsAboutLearning and Literacy*, New York, St. Martin'sGriffin 2007, ISBN 1403984530

[2] Hejný Milan,Novotná Jarmila,StehlíkováNaďa, *Dvacetpět kapitol z didaktiky matematiky,*Univerzita Karlova v Praze - Pedagogická fakulta, 2004, ISBN 80-7290-189-3

[3] KosterRaph. *A theory of fun.*Paraglyph Press. New York,O'ReillyMedia 2004, ISBN 1449363210

[4] Squire Kurt, FromContent to Content: Videogames as DesignedExperience, EducationalResearcher, 2006, dostupné na internetovej doméne: https://www.learntechlib.org/p/71980

Mgr. Lukáš Vícen
Súkromná základná škola a Súkromné gymnázium CENADA
Majerníkova 60
841 05 Bratislava – Dlhé Diely
Lukas.vicen@centrumnadania.sk

UČME ZLOMKY CEZ MERANIE: PREČO A AKO

JANA VIŠŇOVSKÁ, MATEJ SLABÝ

ABSTRAKT. *Na tomto workshope sme si (1) predstavili niektoré z problémov, s ktorými sa pri učení zlomkov stretávame v triedach, (2) ukázali, ako sú tieto problémy logickým dôsledkom toho, ako zlomky modelujeme a učíme, a (3) načrtli odlišný spôsob úvodu do zlomkov, založený na meraní dĺžky a potrebe merať presne.*

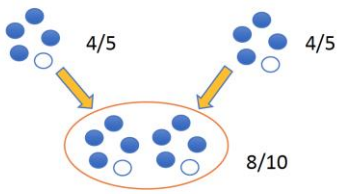
Kde sa stala chyba

To, že zlomky robia mnohým žiakom problémy, žiadneho učiteľa ani rodiča neprekvapí. Aj keď zlomky nevyzerajú ako životne dôležitý matematický nástroj (veď mimo školy sa s výrazmi tvaru $\frac{12}{7}$ takmer nestretneme), práve oni nám umožňujú pracovať s číslami a množstvami, ktoré sa nachádzajú *medzi* celočíselnými hodnotami. Sú teda – ak sú naučené s porozumením – prvým rozšírením množiny prirodzených čísel. Podstatné je, že ak takémuto rozšíreniu majú mať žiaci možnosť porozumieť, neudeje sa to u nich po matematicko-teoretickej stránke, ale po stránke skúsenostnej: „Prečo vlastne *potrebujeme* čísla iné ako tie prirodzené?“ Pokúsime sa ukázať, že hľadaním odpovede na túto otázku môžu mnohí žiaci dostať lepšiu šancu na porozumenie nielen zlomkom, ale neskôr aj racionálnym číslam a proporcionálnym vzťahom.

Používané modely zlomkov

Modely, ktoré najčastejšie používame pri úvode do zlomkov: torta, pizza, čokoláda, hrsť cukríkov – a to, ako ich používame, na predošlú otázku nedávajú postačujúcu odpoveď. Ich snahou je poskytnutie vysvetlenia významu *čitateľa* a *menovateľa* v symbole, ktorého potrebu nik nespochybňuje (a teda ani nepotrebuje obhájiť). Zlomky predsa učíme preto, že sú v osnovách... Spomínané modely sú založené na operácii delenia: menovateľ znamená „na koľko rovnakých častí (jedlo) rozdelíme“ a čitateľ „koľko si z tých častí vezmeme“. Je podstatné spomenúť, že takáto definícia čitateľa a menovateľa platí iba v špeciálnych situáciách, keď je zlomok menší ako 1.

Napriek tomu, že učiteľ s vyspelým kvantitatívnym porozumením zlomkom v týchto modeloch vie zlomky nájsť (priam v nich zlomky *vidí*), žiaci mnohokrát dospievajú logickým používaním tých istých modelov k výsledkom, ktoré ale nie sú pre zlomky správne. Mnohí, napríklad, odmietnu $\frac{7}{6}$, pretože torta rozrezaná na 6 častí predsa nemôže mať častí sedem. Interpretácia $\frac{4}{5}$ ako „4 časti z piatich“ vedie žiakov k logickému záveru, kde $\frac{4}{5}+\frac{4}{5}=\frac{8}{10}$ (pozri Obrázok 1).



Obrázok 1: Keď spojíme 4 časti z piatich a ďalšie 4 časti z 5, máme spolu 8 častí z desiatich.

Veríme, že sa nám podarilo týmito príkladmi načrtnúť závažné zistenie: Niekedy, keď žiaci navrhujú nezvyčajné a na pohľad nesprávne riešenia, nie je chyba v ich úvahách. Nie je to ani chybou učiteľov, ktorí svedomito a s dôverou používajú dostupné materiály a modely. Niekedy nám iba čas a výskum v triedach pomáhajú porozumieť tomu, ako môžu byť samostatné materiály pôvodcom niektorých problémov.

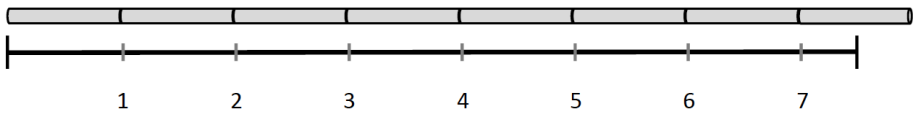
Viaceré kapacity v štúdiu porozumenia zlomkom upozorňujú, že modely, ktoré prezentujú zlomok ako *časť z celku* nezodpovedajú potrebám žiakov – najmä preto, že nevedú k pojmu racionálne číslo [1], neprezentujú kmeňové zlomky v recipročnom vzťahu k prirodzeným číslam [2], predpokladajú porovnávanie obsahov či objemov útvarov, aj keď tieto miery žiaci ešte nezvládli [3], a – chceli by sme zdôrazniť – nevyužívajú úvod do zlomkov na rozvoj porozumenia jedným z prvých matematických štruktúr, ktoré vyžadujú multiplikatívne spôsoby uvažovania (napr. *4 je* $\frac{1}{3}$ *-krát toľko ako 12*).[16] *Porovnávanie*, namiesto *lámania*, je alternatívnou situáciou, pri ktorej vzniká potreba pre zlomky. Ukážeme si teraz jeden príklad toho, ako by úvod do zlomkov mohol vyzerať bez lámania.

Zlomky a meranie

Alternatívny prístup k úvodu do zlomkov, ktorý tu zhŕňame, je podložený viac ako 12-timi rokmi výskumu prvej autorky a jej kolegov v triedach v Mexiku [4] a Austrálii, a aplikačnými štúdiami v Južnej Afrike a na Slovensku [5, 6]. Pedagogické princípy, na ktorých je tento prístup založený, nekompromisne sledujú *porozumenie pre všetkých* ako svoj hlavný cieľ. Dôraz je kladený na podporu otvorenej komunikácie v triede, a na tvorbu situácií, v ktorých je žiakom umožnené hľadať (a nachádzať) odpovede na otázky, ktorých dôležitosť si vopred mali možnosť ujasniť.

Zlomok ako odpoveď na problémy s meraním

Potreba pre zavedenie zlomkov vzniká napríklad pri meraní dĺžky štandardnou jednotkou (Obrázok 2, sivá palička), ktorá sa na meraný objekt nezmestí presný počet krát.



Obrázok 2: Meraný objekt je dlhý 7 jednotiek a kúsok.

Samozrejme, žiaci sú si vedomí, že v súčasnosti meriame pomocou nástrojov ako sú pravítka či krajčírske metre. Vedia, že presnejšiu mieru dostaneme použitím centimetrov, alebo milimetrov. Aby sme im poskytli príležitosť zamyslieť sa nad meraním dĺžky s dostatočnou vážnosťou, a spôsobom, ktorý nám umožní vytvoriť potrebu pre zlomky, zasadili sme úvod do zlomkov do historického príbehu: *Ako asi merali ľudia v čase, keď ešte nemali k dispozícii nástroje, ktoré máme dnes my?*

Na uvedenie do deja – a na premyslenie si postupov pri praktickom meraní dĺžky, ktoré budeme neskôr so značnou presnosťou potrebovať – sú úvodné problémy venované

[16] Alternatívne, aditívne porovnanie pre 4 a 12 je: *4 je o 8 menej ako 12*.

meraniu časťami tela (lakte, dlane, stopy). Úlohy sú zamerané na (1) zvýraznenie inverzného vzťahu medzi dĺžkou dlane a počtom iterácií potrebných na odmeranie rovnakej dĺžky a (2) na podporu komunikácie v triede. Napríklad: *Zuzka a Filip veľmi pozorne merali dĺžku lavice. Zuzka namerala 6 dlaní a Filip nameral 8 dlaní. Ako je to možné? Má Filip dlhšiu dlaň? Ako to vieš? Vysvetli! Vieš zopakovať Evine vysvetlenie?*

Žiaci riešením podobných úloh zistia, že meranie časťami tela má niekoľko nedostatkov: keďže máme rôzne rozmery, každý z nás nameria niečo iné. Odpoveďou na tento problém pri meraní je zavedenie štandardnej *jednotky*, napríklad v našom príbehu meracej paličky (praktická je zhruba 24cm dlhá, pričom žiaci vidia, že každý z nich má rovnako dlhú paličku). Touto paličkou žiaci presne (s dôrazom na presný začiatok, žiadne prekrývanie, žiadne medzery, meranie po rovnej čiare) merajú rôzne predmety v triede, až kým nezačnú nepresnosti zvyškov pri meraní vnímať ako problém. V niektorých triedach žiaci merali paličkou svoju výšku. Takmer všetci namerali päť paličiek a kúsok, no namietali, že predsa nie sú rovnako vysokí.

Definujme zlomky

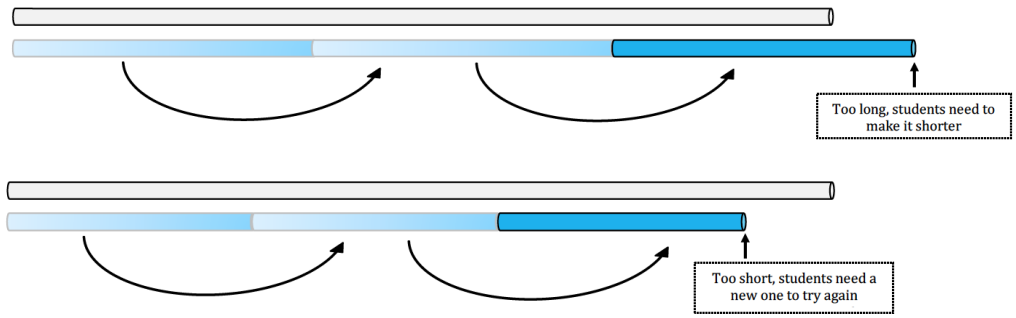
Jednou z možných odpovedí na takto vytvorený problém s presnosťou pri meraní je zavedenie pod-jednotiek merania, čiže dĺžok, ktoré budú v špecifických vzťahoch s dĺžkou predstavujúcou jednotku merania, a budú zodpovedať kmeňovým zlomkom tejto jednotky. Aby tomu tak bolo, v triedach sme tieto pod-jednotky (polovica, tretina, štvrtina, ...) zadefinovali nasledovne:

Dvojkúsok[17] *je kúsok takej dĺžky, že keď ním meriame jednotku, meria presne dva.*

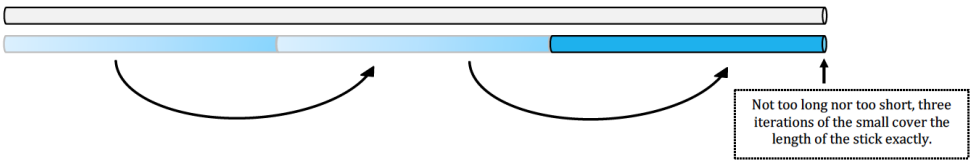
Trojkúsok je kúsok takej dĺžky, že keď ním meriame jednotku, meria presne tri.

Štvorkúsok je kúsok takej dĺžky, že keď ním meriame jednotku, meria presne štyri. ...

Je dôležité zdôrazniť, že v týchto situáciách nie je *jednotka* „celkom“ a kmeňové zlomky nie sú „časťami“ jednotky. Jednotka a jej pod-jednotky existujú naraz a žiadna nie je súčasťou inej. Jednotka je referenčnou dĺžkou, s ktorou budeme iné dĺžky – kratšie aj dlhšie – porovnávať. Pod-jednotky merania sme v triedach vytvárali zo slamiek, alebo prúžkov farebného kartónu metódou pokus-omyl – porovnávaním dĺžky žiadaného počtu iterácií príslušného kúska (pozri Obrázok 3).



[17] Použitie neštandardných názvov pre zlomky umožnilo sústrediť pozornosť v triede na matematické vzťahy medzi skúmanými dĺžkami. Pojem „polovica“ v tom čase zvyčajne znamená pre každé dieťa niečo iné, pričom je jej význam silne zažitý z domáceho prostredia.



Obrázok 3: Pokus-omyl pri výrobe trojkúska.

Tak ako sme podporovali tvorbu matematických argumentov pri porovnávanie relatívnych dĺžok dlaní, aj počas výroby jednotlivých kúskov je dôležité diskutovať v triede o ich vzájomných porovnaniach: *Bude trojkúsok dlhší alebo kratší ako je dvojkúsok? Ako to? Nemal by byť dlhší, keďže 3 je viac ako 2? A čo takto 20-kúsok? Ten bude iste obrovský, nie? A aký dlhý bude jednokúsok?*

Keď žiaci rozumejú kúskom (kmeňovým zlomkom) ako konkrétnym dĺžkam vo vzťahu k referenčnej jednotke, ktoré je možné navzájom porovnávať, predstavíme všeobecné zlomky ako dĺžky, ktoré sú celočíselnými násobkami im príslušného kmeňového zlomku (teda napríklad $\frac{7}{6} = 7 \times \frac{1}{6}$, pozri Obrázok 4).

Obrázok 4: Zlomky ako dĺžky vytvorené iterovaním. 7/6 ako sedem iterácií (prúžkovanej) pod-jednotky merania, ktorá je 1/6 krát taká dlhá ako (sivá) jednotka merania („sedem krát šesťkúsok“).

Zavedenie zlomkov cez meranie má viacero matematických výhod.

(1) Každý kmeňový zlomok má rovnakú definíciu, a vieme ho teda vytvoriť rovnakým procesom. Toto je rozdiel od vytvárania zlomkov povedzme opakovaným skladaním hárku papiera, kde žiaci vedia vyrobiť iba niektoré z jednotkových zlomkov.

(2) Zlomky väčšie ako 1 nie sú ničím výnimočným: podobne ako $\frac{5}{6}$ vznikne piatimi iteráciami šestiny, $\frac{7}{6}$ vznikne siedmimi iteráciami šestiny. Používaný model tu nie je prekážkou.

(3) Silne zažité vyrábanie zlomkov (ako kmeňových, tak aj neskôr všeobecných, ktoré žiaci vymeriavali iteráciami príslušných kúskov na registračnú pásku) tvorí skúsenostný základ pre porovnávanie zlomkov priamo, či neskôr s použitím číselnej osi. Prikladáme pár príkladov toho, ako žiaci v našich triedach argumentovali pri porovnávaní zlomkov.

Čo je väčšie, štvorkúsok, či päťkúsok?

- *Štvorkúsok bude väčší ako päťkúsok, lebo ide pozdĺž menej krát. Lebo zaberá 4 väčšie kúsky v jednej paličke miesto piatich (menších).*
- *Štvorkúsok je väčší lebo zaberá/zakrýva viac miesta. Ak vezmeme štvorkúsok menší (ako päťkúsok), bude na konci voľné (nepokryté) miesto.*
- *Čím menej ich potrebuješ napasovať na paličku, tým dlhšie môžu byť (tým viac majú miesta).*

Čo je väčšie, 12/13, či 6/5?

- *6/5, lebo potrebujeme trinásť 13-kúskov aby sme vyplnili paličku, a s dvanástimi to nie je dosť. A v druhom treba 5, ale je tam 6, a to ide ešte ďalej (ako je koniec paličky).*

Porovnávanie zlomkov pomocou vytvorených kúskov mohlo byť u žiakov neustále demonštrované. Spočiatku si vzali jednotlivé fyzicky vytvorené kúsky (napríklad štvorkúsok a päťkúsok) a porovnali si ich dĺžku. Postupom času však žiaci upúšťali od potreby pracovať s fyzickými s kúskami, a dokázali „vidieť zlomok" ako dĺžku vo svojich predstavách. Dôležité je, že to robili až vtedy, keď už na to boli pripravení. Fyzická manipulácia s kúskami bola vždy v triede považovaná za adekvátny spôsob zdôvodnenia, čo umožnilo všetkým žiakom odpovedať na porovnávacie otázky a prispieť tak do diskusií v triede. Na motivovanie posunu žiakov k zdôvodňovaniu porovnaní bez použitia fyzických kúskov sme, vo vhodných momentoch, používali úlohy s kúskami, ktoré žiaci nemali vyrobené, a takmer iste ani nechceli vyrábať (*Bude dlhší 20-kúsok, či 60-kúsok? 100-kúsok musí byť obrovský, nie?*).

U žiakov sa pri samostatnom vyrábaní kúskov iteráciou, pri ktorej bol omyl prirodzenou súčasťou, vytvorila dobrá predstava o dĺžke každého kúsku. Ako vidíme v príkladoch zdôvodňovania vyššie, táto predstava dĺžky kúskov (kmeňových zlomkov) bola vždy v recipročnom vzťahu k referenčnej jednotke – dĺžke paličky: *„ide pozdĺž (paličky) menej krát"*. Palička sa tiež stala prvou dĺžkou, ku ktorej žiaci dokázali zdôvodniť ekvivalentné dĺžky vytvorené iterovaním kúskov („*potrebujeme trinásť 13-kúskov aby sme vyplnili paličku"*), a stala sa tak nápomocnou mierkou pri vzájomných porovnávaniach všeobecných zlomkov (ako 12/13 a 6/5 vyššie).

Záver

Práca s modelovaním zlomkov cez meranie v triedach nám pomáha objasniť kritické vlastností ako modelu, tak aj používaného pedagogického prístupu. Jednou z kritických výhod modelu je, že v ňom kmeňový zlomok a referenčná jednotka *vždy* (1) existujú zároveň, (2) existujú samostatne, a (3) sú k dispozícii pre priame porovnanie. Pri modeloch časť-celok, pri ktorých je časť reprezentujúca kmeňový zlomok súčasťou celku (krajec pizze je zároveň aj pizzou), majú žiaci k dispozícii buď celok (nepokrájanú pizzu), alebo kolekciu *obmedzeného počtu* kmeňových zlomkov (krajce), no porovnanie jedného z krajcov s celou pizzou nie je nikdy fyzicky možné. Aj keď je pomyselné (nie fyzické) porovnávanie pomerne jednoduché pri zrelom porozumení zlomkom, ak je našim cieľom porozumenie zlomkom ešte len vytvárať, je užitočné si všimnúť, že nám v tomto modeli na *vytváranie porozumenia* chýba dôležitý nástroj.

Na základe skúseností môžeme tvrdiť, že sa pôvodné pomenovávanie „polovica, tretina, ...", pre jednotkové zlomky v našich triedach darí nabúrať. Dokonca aj vo vyšších ročníkoch, pri práci so siedmakmi či ôsmakmi, ktorí už zlomkovú terminológiu a písané symboly majú zažité, sa žiaci po skúsenostiach s našimi úlohami často vracajú ku „kúskom", keď majú problém vymyslieť riešenie „v jazyku zlomkov". Aj keď sa stretávame s názormi, že ide o zbytočnú stratu času pri vyučovaní, toto terminologické „spomalenie" nám umožňuje sústrediť pozornosť žiakov na dôležité vzťahy medzi kvantitami, ktoré v časť-celok situáciách, ktoré majú žiaci spojené so štandardnou terminológiou zlomkov, často chýbajú.

Pre tých, ktorí by si učenie zlomkov cez meranie radi sami vyskúšali, vieme poskytnúť pomocné materiály pre učiteľa kontaktom na jednej z nižšie uvedených emailových adries.

Literatúra

[1] Tzur, Ron: *Fine grain assessment of students' mathematical understanding: Participatory and anticipatory stages in learning a new mathematical conception. Educational Studies in Mathematics,* 66, pp. 273-291, 2007

[2] Thompson, Patrick W., & Saldanha, Luis A.: *Fractions and multiplicative reasoning.* In J. Kilpatrick, G. Martin & D. Schifter (Eds.), *Research companion to the principles and standards for school mathematics* (pp. 95-113). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 2003

[3] Gould, Peter: *Australia's next top fraction model. Australian Primary Mathematics Classroom*, 18(3), pp. 5-12, 2013

[4] Cortina José Luis, Višňovská Jana, & Zuniga Claudia: *Unit fractions in the context of proportionality: supporting students' reasoning about the inverse order relationship*, *Mathematics Education Research Journal,* 26(1), pp. 79-99, 2015 doi: http://dx.doi.org/10.1007/s13394-013-0112-5

[5] Slabý Matej: *Vyučovanie zlomkov založené na meraní* [diplomová práca]. Košice: Univerzita Pavla Jozefa Šafárika, 2019, (práca je v procese realizácie)

[6] Fabiánová Mária: *Vyučovanie zlomkov cez meranie v komunite žiakov zo sociálne znevýhodneného prostredia* [diplomová práca]. Košice: Univerzita Pavla Jozefa Šafárika, 2019

PaedDr. Jana Višňovská, PhD
The University of Queensland
St Lucia, QLD 4072, Austrália
e-mail: j.visnovska@uq.edu.au

Bc. Matej Slabý
Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach
Jesenná 5, 040 01 Košice
e-mail: mohynokan@gmail.com

Dva dni s didaktikou matematiky 2019. Zborník príspevkov.

Editor:	Mária Slavíčková
Počet strán:	94
Vydala:	Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
	Univerzita Komenského v Bratislave
Miesto vydania:	Bratislava
Rok vydania:	2019

Táto publikácia neprešla jazykovou úpravou. Príspevky neboli recenzované. Za obsahovú náplň príspevkov a ich jazykovú stránku zodpovedajú autori.

ISBN 978 – 80 – 8147 – 092 – 9